

2014年第6問

 数理
石井K

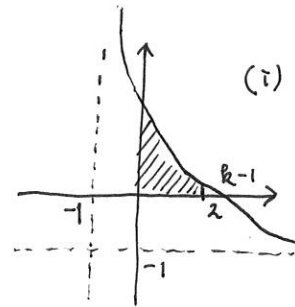
6 関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{k}{x+1} - 1$ と定める。ただし、 k は正の定数である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフが x 軸と交わる点の x 座標を k を用いて表せ。

(2) $S = \int_0^2 |f(x)| dx$ を求めよ。

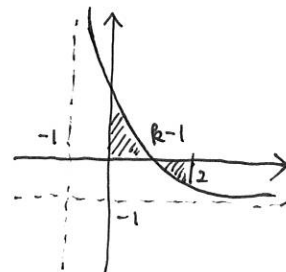
(3) (2) における S を最小にする k と、そのときの S の値を求めよ。

$$(1) \frac{k}{x+1} = 1 \quad \therefore x = k-1 //$$



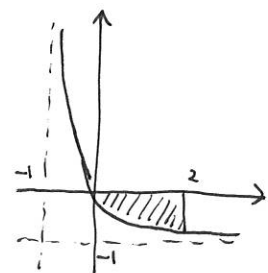
(2) (i) $k > 3$ のとき、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left(\frac{k}{x+1} - 1 \right) dx \\ &= [k \log(x+1) - x]_0^2 \\ &= k \log 3 - 2 // \end{aligned}$$



(ii) $1 \leq k \leq 3$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{k-1} \left(\frac{k}{x+1} - 1 \right) dx + \int_{k-1}^2 \left(1 - \frac{k}{x+1} \right) dx \\ &= [k \log(x+1) - x]_0^{k-1} + [x - k \log(x+1)]_{k-1}^2 \\ &= k \log k - (k-1) + 2 - k \log 3 - (k-1) + k \log k \\ &= \underline{2k \log k - (2 + \log 3)k + 4} // \end{aligned}$$



(iii) $0 < k < 1$ のとき、

$$S = \int_0^2 \left(1 - \frac{k}{x+1} \right) dx = [x - k \log(x+1)]_0^2 = \underline{2 - k \log 3} //$$

(3) $k > 3$ では S は単調増加、 $k < 1$ では単調減少 $\therefore 1 \leq k \leq 3$ の範囲で最小値が存在する。

$$\begin{aligned} S' &= 2 \log k + 2 - (2 + \log 3) \\ &= \log \frac{k^2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore k = \sqrt{3}$ のとき S は最小値 $4 - 2\sqrt{3}$ をとる

| | | | | | |
|------|---|-----|------------|-----|---|
| k | 1 | ... | $\sqrt{3}$ | ... | 3 |
| S' | | - | 0 | + | |
| | | ∨ | | ∧ | |

$4 - 2\sqrt{3}$

最小