0001863096318999

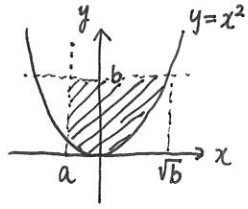
宇都宮大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面において，不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とし，D 内の点 $(a,\ b)$ に対して連立不等式

$y \geqq x^2,\quad x \geqq a,\quad b \geqq y$



の表す領域を $E(a,\ b)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 $E(a,\ b)$ の面積 S を a と b を用いて表せ．

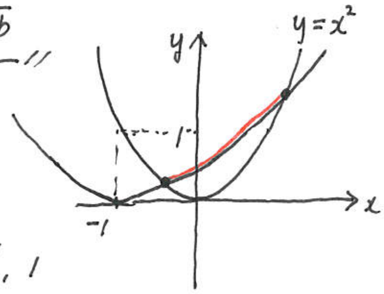
(2) 曲線 $4y = (x+1)^2$ 上の点 $(2t-1,\ t^2)$ が領域 D 内を動くとき，実数 t の取り得る値の範囲を求めよ．

(3) (2) で求めた範囲の t に対して，領域 $E(2t-1,\ t^2)$ の面積を $f(t)$ とするとき，関数 $f(t)$ を t の式で表せ．

(4) (3) で定めた関数 $f(t)$ の最大値を求めよ．

(1) $S = \int_a^{\sqrt{b}} b - x^2\,dx = \left[bx - \frac{1}{3}x^3\right]_a^{\sqrt{b}} = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}b\sqrt{b} - ab + \frac{1}{3}a^3$

$\therefore\ S = \frac{1}{3}a^3 - ab + \frac{2}{3}b\sqrt{b}$ //



(2) $y = x^2$ と $4y = (x+1)^2$ の交点を求めると，

$4x^2 = x^2 + 2x + 1$

$\therefore\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (3x+1)(x-1) = 0 \quad \therefore\ x = -\frac{1}{3},\ 1$

$\therefore\ \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right),\ (1,\ 1) \quad \therefore\ -\frac{1}{3} \leqq 2t-1 \leqq 1 \quad \therefore\ \frac{1}{3} \leqq t \leqq 1$ //

(3) (1) より，$f(t) = \frac{1}{3}(2t-1)^3 - (2t-1)\cdot t^2 + \frac{2}{3}t^2\sqrt{t^2}$

$= \frac{8}{3}t^3 - 4t^2 + 2t - \frac{1}{3} - 2t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t^3$

$= \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + 2t - \frac{1}{3}$ //

(4) $f'(t) = 4t^2 - 6t + 2$

$= 2(2t^2 - 3t + 1) = 2(2t-1)(t-1)$

$\therefore\ f'(t) = 0$ となるのは $t = \frac{1}{2},\ 1$

t	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	0

$\therefore$ 最大値は $\frac{1}{12}$ $\left(t = \frac{1}{2}\right.$ のとき$\left.\right)$ //