2014年 第4問

$\boxed{4}$ 平面上の直線ℓに同じ側で接する2つの円C_1，C_2があり，C_1とC_2も互いに外接している．ℓ，C_1，C_2で囲まれた領域内に，これら3つと互いに接する円C_3を作る．同様にℓ，C_n，C_{n+1}（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）で囲まれた領域内にあり，これら3つと互いに接する円をC_{n+2}とする．円C_nの半径をr_nとし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$r_1=16$，$r_2=9$とする．

(1) ℓがC_1，C_2，C_3と接する点を，それぞれA_1，A_2，A_3とおく．線分$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$の長さおよびr_3の値を求めよ．

(2) ある定数a，bに対して$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）となることを示せ．a，bの値も求めよ．

(3) (2)で求めたa，bに対して，2次方程式$t^2=at+b$の解をα，β（$\alpha>\beta$）とする．$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$を満たす有理数c，dの値を求めよ．ただし，$\sqrt{5}$が無理数であることは証明なしで用いてよい．

(4) (3)のc，d，α，βに対して，

$$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となることを示し，数列$\{r_n\}$の一般項をα，βを用いて表せ．