



2015年第3問

3  $p$  と  $q$  は正の整数とする. 2次方程式  $x^2 - 2px - q = 0$  の2つの実数解を  $\alpha, \beta$  とする. ただし  $\alpha > \beta$  とする. 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. ただし  $\alpha^0 = 1, \beta^0 = 1$  と定める.

- (1) すべての自然数  $n$  に対して,  $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$  であることを示せ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して,  $a_n$  は整数であることを示せ.
- (3) 自然数  $n$  に対し,  $\frac{\alpha^{n-1}}{2}$  以下の最大の整数を  $b_n$  とする.  $p$  と  $q$  が  $q < 2p + 1$  を満たすとき,  $b_n$  を  $a_n$  を用いて表せ.