

2015年第3問

3 a, b は $0 < a < b$ を満たす定数とし、関数 $y = \log x$ のグラフを G とする。点 C が曲線 G 上を点 $A(a, \log a)$ から点 $B(b, \log b)$ まで動くとき、点 C から x 軸への垂線と線分 AB との交点を P とし、線分 CP の長さの最大値を L とする。このとき、以下の問に答えよ。ただし、 $\log x$ は自然対数を表すものとする。

- (1) 不等式 $a < \frac{b \log a}{\log b} < b$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) $h = \frac{b}{a}$ とおくと、 L を h を用いて表せ。
- (3) 実数 p, q, r が $a < p < b, a < q < b, a < r < b$ を満たすとき、不等式

$$\frac{p+q+r}{3} < e^L \sqrt[3]{pqr}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、 e は自然対数の底とする。