0002096903097999

同志社大学

2015年 文学部・経済学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ aを，$a>1$を満たす定数とする．関数

$$y=a^{3x}-3a^{2x+1}+3a^{x+2}+3a^{-x+2}-3a^{-2x+1}+a^{-3x}$$

を考える．$t=a^{x}+a^{-x}$とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) tがとる値の範囲を求めよ．

(2) $a^{3x}+a^{-3x}$をtを用いて表せ．

(3) yをaとtを用いて表せ．

(4) yの最小値をaを用いて求めよ．

(1) $a>1$ より $a^{x}>0,\ a^{-x}>0$ であるから．

相加・相乗平均の関係より

$$a^{x}+a^{-x}\geqq 2\sqrt{a^{x}\cdot a^{-x}}$$
$$=2 \quad (\text{等号成立は } x=0 \text{ のとき})$$

$\therefore\ \underline{t\geqq 2}$ //

(2) $a^{3x}+a^{-3x}=(a^{x})^{3}+(a^{-x})^{3}$

$=(a^{x}+a^{-x})^{3}-3a^{x}\cdot a^{-x}(a^{x}+a^{-x})$

$=\underline{t^{3}-3t}$ //

(3) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^{x}+a^{-x})^{2}-2=t^{2}-2$

$\therefore\ y=(a^{3x}+a^{-3x})-3a(a^{2x}+a^{-2x})+3a^{2}(a^{x}+a^{-x})$

$=t^{3}-3t-3a(t^{2}-2)+3a^{2}t$

$=\underline{t^{3}-3at^{2}+3(a^{2}-1)t+6a}$ //

(4) $y'=3t^{2}-6at+3(a^{2}-1)$

$=3\{t^{2}-2at+(a+1)(a-1)\}$

$=3\{t-(a+1)\}\{t-(a-1)\}$

t	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

tが任意の実数をとるとき増減表は右のようになる．

$\therefore$ (3)で求めたtの関数を$f(t)$とおくと，yの最小値は$f(2)$と$f(a+1)$の大きくない方である．

$f(a+1)-f(2)=(a+1)^{3}-3a(a+1)^{2}+3(a^{2}-1)(a+1)+6a-(6a^{2}-6a+2)$

$=(a-1)^{2}(a-4)$

$\therefore\ 1<a<4$ のとき．$f(a+1)<f(2)$，$a\geqq 4$ のとき．$f(a+1)\geqq f(2)$

$\therefore\ y$の最小値は $\begin{cases} f(a+1)=a^{3}+3a-2 & (1<a<4\text{のとき}) \\ f(2)=6a^{2}-6a+2 & (a\geqq 4\text{のとき}) \end{cases}$ //