津田塾大学

2016年 学芸（数学） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ p, q, r を有理数とし，$f(x)=x^3+3px^2+qx+r$ とする．曲線 $y=f(x)$ は点 $(t,\ 0)$ で x 軸に接している．

(1) $f(x)=f'(x)(Ax+B)+Cx+D$ をみたす定数 A, B, C, D を p, q, r を用いて表せ．

(2) t は有理数であることを示せ．

(1) $f'(x)=3x^2+6px+q$

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(x)(Ax+B)+Cx+D &= (3x^2+6px+q)(Ax+B)+Cx+D\\ &= 3Ax^3+3Bx^2+6pAx^2+6pBx+qAx+qB+Cx+D\\ &= 3Ax^3+3(B+2pA)x^2+(6pB+qA+C)x+qB+D\end{aligned}$$

これと $f(x)$ の各項の係数を比較して，

$$\begin{cases}3A=1\\ B+2pA=p\\ 6pB+qA+C=q\\ qB+D=r\end{cases} \iff \begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=\frac{1}{3}p\\ C=\frac{2}{3}q-2p^2\\ D=r-\frac{1}{3}pq\end{cases}$$ //

(2) $y=f(x)$ は点 $(t,0)$ で x 軸に接するので，$f(t)=f'(t)=0$

$f(x)=f'(x)(Ax+B)+Cx+D$ に $x=t$ を代入して，$Ct+D=0$

(i) $C\neq 0$ のとき

$t=-\frac{D}{C}$ となり，

(1)の結果と，p, q, r が有理数であることより，C, D は有理数　∴ t は有理数

(ii) $C=0$ のとき，

$D=0$ となり，$q=3p^2$ かつ $r=\frac{1}{3}pq=p^3$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x) &= x^3+3px^2+3p^2x+p^3\\ &= (x+p)^3\end{aligned}$$

$y=f(x)$ のグラフは $(-p,0)$ で x 軸に接するので，$t=-p$（有理数）

(i), (ii)より，いずれの場合も t は有理数となる ▨