0001880639118999

津田塾大学

2014年 学芸（英文） 第2問

数理 石井K

2 放物線 $C_1 : y = x^2$ と放物線 $C_2 : y = -(x-a)^2 + b$ が点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t > 0)$ において接している．

(1) a と b を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C_2 と x 軸との交点のうち，x 座標の小さい点をQとし，原点をOとする．C_1 と C_2 と線分OQで囲まれた部分の面積を S_1 とし，C_2 と線分OQと y 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする．$\dfrac{S_1}{S_2}$ は t に無関係な値であることを示せ．

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = -(x-a)^2 + b$ とおくと．

点Pで接していることから．$f(t) = g(t)$ かつ $f'(t) = g'(t)$

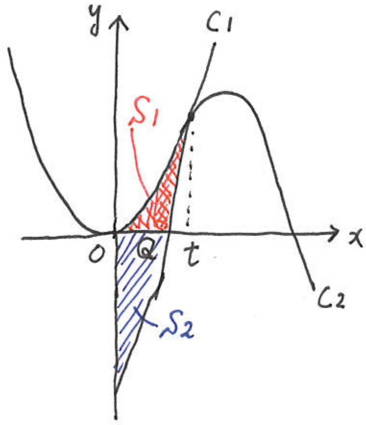
$\therefore\ t^2 = -(t-a)^2 + b$ かつ $2t = -2(t-a)$

$\therefore\ \underline{a = 2t,\ b = 2t^2}$ //

(2) $b = 2t^2$, $a = 2t$ を C_2 の式に代入して

$0 = -(x-2t)^2 + 2t^2$ $\quad \therefore\ x = (2 \pm \sqrt{2})t$

$\therefore\ Q((2-\sqrt{2})t,\ 0)$



$$S_2 = \int_0^{(2-\sqrt{2})t} (x-a)^2 - b\ dx$$

$$= \left[\frac{(x-a)^3}{3} - bx \right]_0^{(2-\sqrt{2})t}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}t^3}{3} - 2t^2(2-\sqrt{2})t + \frac{8t^3}{3}$$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)t^3$$

$$S_1 + S_2 = \int_0^t x^2 + (x-a)^2 - b\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{(x-a)^3}{3} - bx \right]_0^t$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{(t-a)^3}{3} - bt + \frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3}t^3$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2} = \frac{(S_1+S_2) - S_2}{S_2}$$

$$= \frac{S_1+S_2}{S_2} - 1$$

$$= \frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)t^3} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$\therefore$ t に無関係な値である ▨