0001689630138999

津田塾大学

2013年 学芸（数学） 第4問

数理 石井K

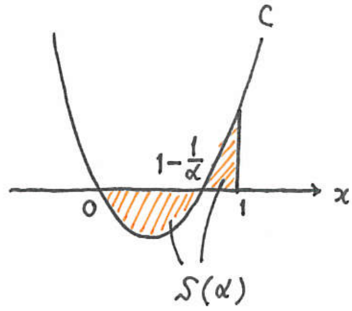
$\boxed{4}$ 実数 $\alpha > 1$ に対して

$$y = \alpha x^2 + (1-\alpha)x$$

で表される曲線を C とする．

(1) C と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(\alpha)$ を求めよ．

(2) $S(\alpha)$ が最小となるような α の値を求めよ．



(1) C と x 軸の交点を求める．

$x(\alpha x + 1 - \alpha) = 0$ より． $x = 0,\ 1-\frac{1}{\alpha}$

ここで $\alpha > 1$ より． $0 < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1$ となる．

$$\therefore S(\alpha) = \int_0^{1-\frac{1}{\alpha}} -\alpha x^2 - (1-\alpha)x\,dx + \int_{1-\frac{1}{\alpha}}^{1} \alpha x^2 + (1-\alpha)x\,dx$$

$$= -\alpha \int_0^{1-\frac{1}{\alpha}} x\left\{x - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right\}dx + \left[\frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{1-\alpha}{2}x^2\right]_{1-\frac{1}{\alpha}}^{1}$$

$$= \frac{\alpha}{6}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^3 - \frac{1-\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$= \underline{\frac{1}{6}\left(\alpha - 3 + \frac{6}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}\right)}\ //$$

(2) $S'(\alpha) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{6}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3}\right)$

$$= \frac{\alpha^3 - 6\alpha + 4}{6\alpha^3}$$

$$= \frac{(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha-2)}{6\alpha^3}$$

α	(1)	…	2	…
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$
$S(\alpha)$		↘	$\frac{1}{4}$	↗

$\alpha > 1$ のとき． $\alpha^2 + 2\alpha - 2 > 0$ より．

$S'(\alpha) = 0$ となるのは． $\alpha = 2$ のとき．

$\therefore$ 増減表より $S(\alpha)$ が最小となるのは $\underline{\alpha = 2}$ //