一橋大学

2014年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 数直線上の点Pを次の規則で移動させる．一枚の硬貨を投げて，表が出ればPを $+1$ だけ移動させ，裏が出ればPを原点に関して対称な点に移動させる．Pは初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後のPの座標を a_n とする．

(1) $a_3 = 0$ となる確率を求めよ．

(2) $a_4 = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ のとき，$a_n = n-3$ となる確率を n を用いて表せ．

(1) (裏，裏，裏)，(表，裏，表) の2通り． $\therefore \dfrac{2}{2^3} = \underline{\dfrac{1}{4}}$ //

(2) (裏，裏，裏，表)，(表，裏，表，表)，(裏，表，裏，裏) の3通り．

$\therefore \dfrac{3}{2^4} = \underline{\dfrac{3}{16}}$ //

(3) $a_n = n-3$ となる確率を P_n とおくと．考えられるのは次の場合（$n \geqq 3$ とする）

- $a_{n-1} = n-4$ で n 回目に表が出る ……(i)
- $a_{n-1} = -(n-3)$ で n 回目に裏が出る． …(ii)

(ii)の場合は，$(\text{裏}, \underbrace{\text{表}, \cdots \text{表}}_{n-3\text{回}}, \text{裏})$ のときのみなので，

$$P_n = P_{n-1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}$$

$\therefore$ 両辺 2^n をかけて． $2^n \cdot P_n = 2^{n-1} \cdot P_{n-1} + 1$

(2)より．

$\therefore \{2^n P_n\}$ は ~~初項2~~ ~~第3項~~ 第4項が $2^4 \cdot P_4 = 3$，公差が1の

等差数列 $\quad \therefore 2^n P_n = 3 + 1 \cdot (n-4) = n-1$

$$\therefore \underline{P_n = \frac{n-1}{2^n}} \text{ //}$$

これは $n=3$ のときも成り立つ（(1)より）