0000004905999999

# 豊橋技術科学大学

2010 年 工学部 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 1から順に自然数を並べた数列を，下のように，3 個，6 個，9 個，… と，第 $n$ 組に含まれる自然数の個数が $3n$ 個となるような組に分ける．

1, 2, 3 | 4, 5, 6, 7, 8, 9 | 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 | 19, 20, 21, …

この数列に関する以下の問いに答えよ．

(1) 第 $n$ 組の先頭の自然数の値を，$n$ を用いた式で表せ．

(2) 第 $n$ 組に含まれる自然数の総和を，$n$ を用いた式で表せ．

(3) 第 1 組から第 $n$ 組までに含まれる自然数の総和を，$n$ を用いた式で表せ．

(4) 自然数 1000 は，第何組の何番目に現れるか求めよ．

(1) 第1組から第 n−1 組まで（第 n−1 組も含む）に含まれる自然数は，

$3+6+9+\cdots+3(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}3k=\frac{3}{2}n(n-1)$ 個 $(n\geqq 2)$ なので，

第n組の先頭は $\frac{3}{2}n(n-1)+1$ 番目の自然数．すなわち，$\underline{\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1}$ //

これは n=1 のときも成り立つ

(2) (1)より，第(n+1)組の先頭は $\frac{3}{2}n(n+1)+1$

よって，第n組に含まれる自然数の総和は

(初項＋末項) × $\frac{項数}{2}$ で計算する．

$\left\{\frac{3}{2}n(n-1)+1\right\}+\left\{\frac{3}{2}n(n-1)+2\right\}+\cdots+\left\{\frac{3}{2}n(n+1)\right\}$

$=\left\{\frac{3}{2}n(n-1)+1+\frac{3}{2}n(n+1)\right\}\times\frac{3n}{2}$

$=\underline{\frac{3}{2}n(3n^2+1)}$ //

(3) (2)より

$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}k(3k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{2}k^3+\frac{3}{2}k$

$=\frac{9}{2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\underline{\frac{3}{8}n(n+1)(3n^2+3n+2)}$ //

(4) $\sum_{k=1}^{n}3k<1000 \iff n(n+1)<\frac{2000}{3}\fallingdotseq 666.7$ これをみたす最大のnは n=25

このとき $\sum_{k=1}^{25}3k=975$ ∴ $\underline{第26組の25番目}$ //