豊橋技術科学大学

2010年 工学部 第3問

$\boxed{3}$ $y = f(x) = (x+2)e^{-x}$ を曲線 A，$y = ax + 2a$ を直線 B とする（ただし，a は $a \neq 0$ の実数）．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減表を示せ．ただし，$f(x)$ の第2次導関数まで求め，変曲点も増減表に示せ．

(3) 曲線 A が直線 B に接するとき，a の値を求めよ．

(4) 曲線 A と直線 B が接するとき，曲線 A と直線 B および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x) = e^{-x} + (x+2)\cdot(-e^{-x}) = -(x+1)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e	$\searrow$

極大

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$x = -1$

$\therefore$ $x = -1$ で極大値 e をとる //

(2) $f''(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x}$

$\therefore$ 右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	e	$\searrow$	2	$\searrow$

極大　　変曲点

(3) $y = f(x)$ のグラフの接点を $(t, (t+2)e^{-t})$

とおくと，接線は，$y = -(t+1)e^{-t}(x-t) + (t+2)e^{-t}$

$\therefore$ 接線は $y = -(t+1)e^{-t}x + (t^2+2t+2)e^{-t}$　これが $y = ax + 2a$ より

$-(t+1)e^{-t}\cdot 2 = (t^2+2t+2)e^{-t}$　$\therefore$ $(t+2)^2 e^{-t} = 0$

$e^{-t} > 0$ より，$t = -2$　このとき，$a = e^2$ //

(4) $S = \int_{-2}^{0} ax + 2a - (x+2)e^{-x}\, dx$

$= \int_{-2}^{0} e^2 x + 2e^2 - 2e^{-x} + x(e^{-x})'\, dx$

展開しなければ良かった…後悔

$= \left[\frac{e^2}{2}x^2 + 2e^2 x + 2e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \left[xe^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx$

$= e^2 + 3$ //