2012年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ xy 平面上の点とベクトルに関する以下の問いに答えよ.

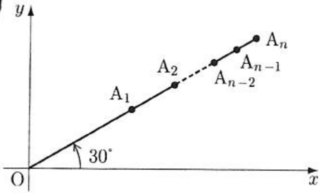
(1) 図のように x 軸の正の部分と 30° の角をなす直線上に n 個の点（A_1, A_2, …, A_n）を以下の規則で配置する. このときの A_n の座標を n を用いて表せ. また $n\to\infty$ の場合における A_n の座標を求めよ.

（規則） $|\overrightarrow{OA_1}|=2$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}$

(1) $|\overrightarrow{OA_n}| = 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$= 2\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$= 4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$



$\therefore A_n\left(|\overrightarrow{OA_n}|\cos 30^\circ, |\overrightarrow{OA_n}|\sin 30^\circ\right)$

$\therefore A_n\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ //

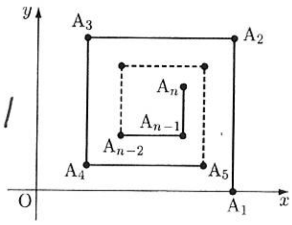
$A_\infty(2\sqrt{3},\ 2)$ //

(2) 今度は n 個の点を第一象限内に図のように反時計回りに配置する. 各線分は隣り合う線分と直角をなす. このとき $n\to\infty$ の場合における A_n の座標を求めよ. ただし, 各線分の長さの関係は以下の規則に従うものとする.

（規則） $|\overrightarrow{OA_1}|=2$, $|\overrightarrow{A_1A_2}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA_1}|$, $|\overrightarrow{A_{n-1}A_n}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}|$

$A_n(x_n, y_n)$ とおくと.

$x_n = |\overrightarrow{OA_1}|-|\overrightarrow{A_2A_3}|+|\overrightarrow{A_4A_5}|-|\overrightarrow{A_6A_7}|+\cdots$



$\therefore x_n = 2-\frac{2}{4}+\frac{2}{4^2}-\frac{2}{4^3}+\cdots$

$\therefore x_\infty = \dfrac{2}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{8}{5}$

$y_n = |\overrightarrow{A_1A_2}|-|\overrightarrow{A_3A_4}|+|\overrightarrow{A_5A_6}|-|\overrightarrow{A_7A_8}|+\cdots$

$= 1-\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4^2}\right)-\left(\frac{1}{4^3}\right)+\cdots$

$\therefore y_\infty = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore A_\infty\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ //