愛知工業大学

2014年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a>0$とする．xy平面において，放物線$y=x^2+1$の$x \geqq 0$の部分をCとし，曲線C上の点$\mathrm{A}(a,\ a^2+1)$における接線をℓ，Aを通りℓに垂直な直線をmとする．

(1) 直線ℓの方程式と直線mの方程式を求めよ．

(2) 曲線C，直線ℓおよびy軸で囲まれた部分の面積をS_1とし，曲線C，直線mおよびy軸で囲まれた部分の面積をS_2とする．$3S_1=S_2$となるとき，aの値を求めよ．

(1) $y'=2x$ より．$\ell: y=2a(x-a)+a^2+1$ $\quad\therefore \underline{\ell: y=2ax-a^2+1}$ //

また m の傾きは．$-\frac{1}{2a}$ なので，$m: y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2+1$

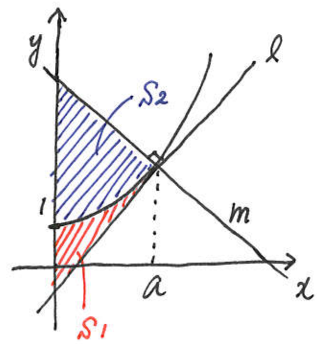
$\therefore \underline{m: y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{3}{2}}$ //

(2) $S_1=\int_0^a x^2+1-(2ax-a^2+1)\,dx$

$=\int_0^a (x-a)^2\,dx$

$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_0^a$

$=\frac{a^3}{3}$



$S_2=$ (右図の直角三角形) $-S_1$

$=\left\{a^2+\frac{3}{2}-(-a^2+1)\right\}\times a\times\frac{1}{2}-\frac{a^3}{3}$

$=\frac{2}{3}a^3+\frac{a}{4}$

$\therefore 3S_1=S_2$ より $a^3=\frac{2}{3}a^3+\frac{a}{4}$

$a\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}\right)=0$

$a>0$ より $\underline{a=\frac{\sqrt{3}}{2}}$ //