0002240639577999

富山県立大学

2016年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ k は正の整数とする．定積分 $I_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$ とする．S_1，S_2，S_3 を求めよ．

(2) 不等式 $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < I_k < \frac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ の整数部分を求めよ．

(1)
$$S_1 = I_1 = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \underline{2\sqrt{2}-2}$$

$$S_2 = I_1 + I_2 = \int_1^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^3 = \underline{2\sqrt{3}-2}$$

$$S_3 = I_1 + I_2 + I_3 = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4-2 = \underline{2}$$

(2) $k \leqq x \leqq k+1$ (k は正の整数) において，

$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つので，区間 $[k, k+1]$ で積分して，

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k+1}}\int_k^{k+1} dx < I_k < \frac{1}{\sqrt{k}}\int_k^{k+1} dx$$

よって，$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < I_k < \frac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つ ▨

(3) (2)より，$I_k < \frac{1}{\sqrt{k}} < I_{k-1}$ $(k \geqq 2)$ $\cdots$ (*)

(*)式を $k=2$ から $k=100$ まで足し合わせて，

$$\sum_{k=2}^{100} I_k < \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{100} I_{k-1} \quad \cdots (**)$$

ここで，$\sum_{k=2}^{100} I_k = \int_2^{101} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^{101} = 2\sqrt{101} - 2\sqrt{2}$

$\sum_{k=2}^{100} I_{k-1} = \int_1^{100} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{100} = 20 - 2 = 18$

$\therefore$ (**)より，$2\sqrt{101} - 2\sqrt{2} < \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} < 18$　ここで，$\underbrace{2\sqrt{100} - 2\cdot\frac{3}{2}}_{=17} < 2\sqrt{101} - 2\sqrt{2}$ より，

$17 < \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} < 18$　すべての辺に1を加えて，$18 < \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} < 19$　$\therefore$ $\underline{整数部分は，18}$