2013年 工・農・医（生命科学）第3問

$\boxed{3}$ $I=\int e^{-x}\sin x\,dx$，$J=\int e^{-x}\cos x\,dx$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の関係式が成り立つことを証明せよ．

$$I=J-e^{-x}\sin x,\quad J=-I-e^{-x}\cos x$$

(2) I，J を求めよ．

(3) 曲線 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geqq 0)$ と x 軸とで囲まれた図形で x 軸の下側にある部分の面積を，y 軸に近い方から順に S_1，S_2，S_3，… とするとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ．

(1) $I=\int e^{-x}(-\cos x)'\,dx$　部分積分

$= -e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx$

$= -e^{-x}\cos x-J$

$\therefore\ J=-I-e^{-x}\cos x$ ■ …①

$J=\int e^{-x}(\sin x)'\,dx$

$= e^{-x}\sin x-\int -e^{-x}\sin x\,dx$

$= e^{-x}\sin x+I$

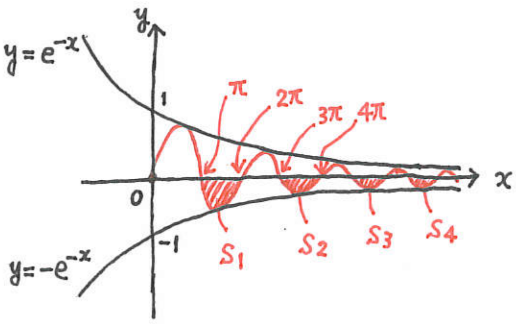
$\therefore\ I=J-e^{-x}\sin x$ ■ …②

(2) ① を ② に代入して．$I=-I-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$\therefore\ \underline{I=-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)}$ //　① より．$\underline{J=\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)}$ //

(3) $e^{-x}\sin x\leqq 0$ となるのは．

$(2n-1)\pi\leqq x\leqq 2n\pi$ のとき．$(n=1,2,\cdots)$



$\therefore\ S_n=\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}-e^{-x}\sin x\,dx$

$=\left[\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}$　（∵(2)より）

$=\dfrac{1}{2}\left(e^{-2n\pi}+e^{-(2n-1)\pi}\right)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\left(e^{-\pi}+e^{-2\pi}+e^{-3\pi}+e^{-4\pi}+\cdots\right)$

初項 $e^{-\pi}$，公比 $e^{-\pi}$ の無限等比級数の和で，$0<|e^{-\pi}|<1$ より収束する．

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$

$=\underline{\dfrac{1}{2(e^{\pi}-1)}}$ //