富山県立大学

2014年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ nは正の整数とする．等式 ${}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n = (1+x)^n$ を用いて，次の等式が成り立つことを示せ．

(1) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}_nC_n = 0$

(2) ${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$

(3) ${}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + 3 \cdot {}_nC_2 + \cdots + (n+1) \cdot {}_nC_n = (n+2) \cdot 2^{n-1}$

(1) 等式に $x=-1$ を代入して.

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0 \quad ■$$

(2) 等式の両辺を x で微分すると,

$${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 x + 3 \cdot {}_nC_3 x^2 + \cdots + n \cdot {}_nC_n \cdot x^{n-1} = (1+x)^{n-1} \cdot n$$

$x=1$ を代入して

$${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = n \cdot 2^{n-1} \quad ■$$

(3) 等式の両辺に x をかけて，さらに x で微分すると,

$${}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 x + 3 \cdot {}_nC_2 x^2 + \cdots + (n+1) \cdot {}_nC_n \cdot x^n = \{x(1+x)^n\}'$$

$$(\text{右辺}) = (1+x)^n + x \cdot n(1+x)^{n-1}$$

両辺に $x=1$ を代入して.

$${}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + 3 \cdot {}_nC_2 + \cdots + (n+1) \cdot {}_nC_n = 2^n + n \cdot 2^{n-1}$$

$$= (n+2) \cdot 2^{n-1} \quad ■$$