



2015年工学部第3問

3 a を定数として、曲線 $y = x^3 + x^2 + a$ に関する次の問いに答えよ。

- (1) $x = t$ における曲線の接線の方程式を求めよ。
 (2) (1) の接線が $(1, 0)$ を通るとき、 a を t の関数として求めよ。
 (3) (2) の条件のもとで、接線が3本存在する a の範囲を求めよ。

(1) $y' = 3x^2 + 2x$, 接点 は $(t, t^3 + t^2 + a)$

$$\therefore \text{接線は } y = (3t^2 + 2t)(x - t) + t^3 + t^2 + a$$

$$\therefore \underline{y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 + a}$$

(2) $x = 1, y = 0$ を代入すると、

$$0 = -2t^3 + 2t^2 + 2t + a$$

$$\therefore \underline{a = 2(t^3 - t^2 - t)}$$

(3) $f(t) = 2(t^3 - t^2 - t)$ とおくと

$$f'(t) = 2(3t^2 - 2t - 1)$$

$$= 2(3t + 1)(t - 1)$$

\therefore 増減表は右のようになり

グラフは右下になる。

このグラフと $y = a$ との交点が3個となるのは、

$$\underline{-2 < a < \frac{10}{27}}$$

| | | | | | |
|---------|------------|-----------------|------------|----|------------|
| t | ... | $-\frac{1}{3}$ | ... | 1 | ... |
| $f'(t)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(t)$ | \nearrow | $\frac{10}{27}$ | \searrow | -2 | \nearrow |

