# 北海道大学

2015年 理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a$は実数とし，2つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x,\quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，$e$は自然対数の底である．$C_1$上の点$(t,\ (t-1)e^t)$における$C_1$の接線が$C_2$に接するとする．

(1) $a$を$t$で表せ．

(2) $t$が実数全体を動くとき，$a$の極小値，およびそのときの$t$の値を求めよ．

(1) $C_1$において．$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$\therefore$ 接線は．$y=te^t(x-t)+(t-1)e^t$

$\therefore\ y=te^t\cdot x-(t^2-t+1)e^t$

$\frac{1}{2e}x^2+a-te^tx+(t^2-t+1)e^t=0$ が重解をもてばよいので

判別式 $D=(te^t)^2-4\cdot\frac{1}{2e}\left(a+(t^2-t+1)e^t\right)=0$

$\therefore\ \frac{e}{2}\cdot t^2e^{2t}=a+(t^2-t+1)e^t$

$\therefore\ \underline{a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t}$ //

(2) $f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと．

$f'(t)=t\cdot e^{2t+1}+et^2e^{2t}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t$

$=t(t+1)e^t\cdot(e^{t+1}-1)$

$\therefore\ f'(t)=0$ となるのは．$t=0,-1$，

| $t$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |

$\therefore$ $\underline{極小値は\ -1\ (t=0のとき)}$ //