

三重大学

2016年 医学部 第1問

1 平面上の $\triangle ABC$ と点 O を考える. m, n は正の実数とする.

(1) 辺 AB を $m:n$ に内分する点を M とする. このとき $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{OM}|^2$ を $|\overrightarrow{OA}|^2, |\overrightarrow{OB}|^2$ と内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ で表せ. さらに

$$\frac{mn}{m+n} |\overrightarrow{AB}|^2 + (m+n) |\overrightarrow{OM}|^2 = n |\overrightarrow{OA}|^2 + m |\overrightarrow{OB}|^2$$

を示せ.

(2) 辺 AB を $m:n$ に内分する点を M_1 , 辺 BC を $m:n$ に内分する点を M_2 , 辺 CA を $m:n$ に内分する点を M_3 とする. このとき $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$ は

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \left(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 \right) + |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

に等しいことを示せ.

(3) (2) の m, n を変化させたとき

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OM_1}|^2 - |\overrightarrow{OM_2}|^2 - |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

の最大値を $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{BC}|^2, |\overrightarrow{CA}|^2$ で表せ.