富山大学

2012年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $x>0$ のとき，$\tan\theta = x$ となる θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つ存在する．その θ を $f(x)$ と表すことにする．

(1) 3以上の素数 p に対して，$f\left(\dfrac{p}{k}\right)+f\left(\dfrac{p}{l}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ を満たす自然数の組 $(k,\ l)$ を求めよ．ただし，$k \leqq l$ とする．

(2) 自然数 $m,\ n$ について，$\sin\left\{2f\left(\dfrac{m}{n}\right)\right\}$ を m と n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sin\left\{2f\left(\frac{m}{n}\right)\right\}$ を求めよ．

(1) $f(x)$ の定義より，$\tan f\left(\frac{p}{k}\right)=\frac{p}{k}$，$\tan f\left(\frac{p}{l}\right)=\frac{p}{l}$

$\therefore \tan\left\{f\left(\frac{p}{k}\right)+f\left(\frac{p}{l}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{\frac{p}{k}+\frac{p}{l}}{1-\frac{p}{k}\cdot\frac{p}{l}}=1$

$\therefore \dfrac{p(k+l)}{kl-p^2}=1 \qquad \therefore kl-pk-pl-p^2=0$

$\therefore (k-p)(l-p)=2p^2$

$p\geqq 3$，p は素数，$-p<k-p\leqq l-p$ より，

$(k-p,\ l-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p)$

$\therefore \underline{(k,\ l)=(p+1,\ 2p^2+p),\ (p+2,\ p^2+p),\ (2p,\ 3p)}$ //

(2)
$$\begin{aligned}\sin\left\{2f\left(\tfrac{m}{n}\right)\right\} &= 2\sin f\left(\tfrac{m}{n}\right)\cos f\left(\tfrac{m}{n}\right)\\ &= 2\tan f\left(\tfrac{m}{n}\right)\cdot\cos^2 f\left(\tfrac{m}{n}\right)\\ &= 2\tan f\left(\tfrac{m}{n}\right)\cdot\frac{1}{1+\tan^2 f\left(\frac{m}{n}\right)}\\ &= 2\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\ &= \underline{\frac{2mn}{m^2+n^2}}\ //\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(与式) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\\ &= \int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= \Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1\\ &= \underline{\log 2}\ //\end{aligned}$$

区分求積法