富山大学

2015年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であり，区間 $(a,\ b)$ で第２次導関数 $f''(x)$ をもつとする．さらに，区間 $(a,\ b)$ で $f''(x)<0$ が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x) > \dfrac{1}{b-a}\{(b-x)f(a)+(x-a)f(b)\}$ $(a<x<b)$ が成り立つことを示せ．

(2) c が $a<c<b$ を満たすならば

$$f(x) \leqq f'(c)(x-c)+f(c) \quad (a<x<b)$$

が成り立つことを示せ．

(1) $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{b-a}\left\{(b-x)f(a)+(x-a)f(b)\right\}$ とおくと,

$g(a)=0$, $g(b)=0$ であり,

(a, b) において

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $g''(x) = f''(x) < 0$ となる.

$\therefore$ $g'(x)$ は単調減少となる.

また, $g(x)$ は $[a, b]$ で連続であり, (a, b) で微分可能であるから，平均値の定理より

$g'(\alpha) = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0 \quad (a<\alpha<b)$

をみたす実数 α が存在する. よって増減表は右のようになる.

x	(a)	$\cdots$	α	$\cdots$	(b)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって. $a<x<b$ において, $g(x)>0$

すなわち, $f(x) > \dfrac{1}{b-a}\left\{(b-x)f(a)+(x-a)f(b)\right\}$ が成り立つ ▨

(2) $h(x) = f'(c)(x-c)+f(c)-f(x)$ とおくと, (a, b) において

$h'(x) = f'(c) - f'(x)$, $h''(x) = -f''(x) > 0$

よって, $h'(x)$ は単調増加. また, $h'(c)=0$, $h(c)=0$ であるから

増減表は右のようになる.

x	(a)	$\cdots$	c	$\cdots$	(b)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\therefore$ $a<x<b$ において $h(x) \geqq 0$

すなわち, $f(x) \leqq f'(c)(x-c)+f(c)$ が成り立つ ▨