0002073726297999

富山大学

2015年 第2問　　1枚目／2枚．　　数理 石井K

$\boxed{2}$ a を実数とする．関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=x^2+ax+3$, $g(x)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$ と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x \neq 0$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $t=x+\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ とするとき，$g(x)$ を a, t を用いて表せ．

(3) $g(x)$ $(x\neq 0)$ の最小値が負となるような a の値の範囲を求めよ．

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと．$\dfrac{dt}{dx}=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
t'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
t	$\nearrow$	-2	$\searrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$

右の増減表と．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} t=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} t=-\infty$ より．

$\underline{x+\dfrac{1}{x}\leqq -2,\ 2\leqq x+\dfrac{1}{x}}$ //

(2) $g(x)=(x^2+ax+3)\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{a}{x}+3\right\}$

$=1+ax+3x^2+\dfrac{a}{x}+a^2+3ax+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3a}{x}+9$

$=3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+4a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+a^2+10$

ここで，$t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ より．

$g(x)=3(t^2-2)+4at+a^2+10$

$=\underline{3t^2+4at+a^2+4\ \ (t\leqq -2,\ 2\leqq t)}$ //

(3) (2)で求めた式を $h(t)$ とおくと．

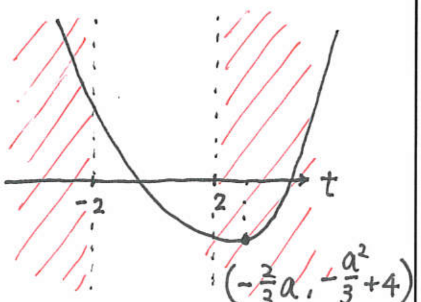
$h(t)=3\left(t+\dfrac{2}{3}a\right)^2-\dfrac{a^2}{3}+4$

(i) $-\dfrac{2}{3}a\leqq -2$ または $2\leqq -\dfrac{2}{3}a$ のとき．

すなわち．$a\leqq -3$ または $a\geqq 3$ のとき．

最小値は $-\dfrac{a^2}{3}+4<0$ $\therefore$ $a<-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}<a$

これは $a\leqq -3$, $a\geqq 3$ をみたす．



(i)のときのグラフ．

2枚目につづく

0002073726297999

富山大学

2015年 第2問　　2枚目／2枚.

数理 石井K

$\boxed{2}$ aを実数とする．関数$f(x)$，$g(x)$を$f(x)=x^2+ax+3$，$g(x)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x \neq 0$のとき，$x+\dfrac{1}{x}$のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $t=x+\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$とするとき，$g(x)$をa，tを用いて表せ．

(3) $g(x)$ $(x \neq 0)$の最小値が負となるようなaの値の範囲を求めよ．

(3)のつづき.

(ii) $-3 \leqq a \leqq 0$ のとき.

右のグラフから. $t \leqq -2$, $2 \leqq t$ での

最小値は. $h(2) = a^2+8a+16$

$= (a+4)^2$

$\geqq 0$

∴ 負になることはない.

(iii) $0 \leqq a \leqq 3$ のとき.

右のグラフから.

最小値は. $h(-2) = a^2-8a+16$

$=(a-4)^2$

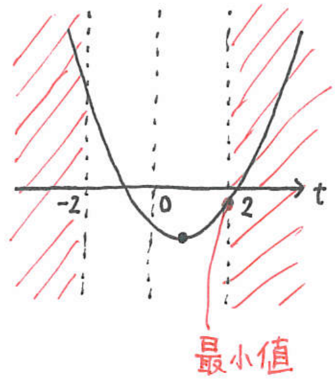
$\geqq 0$

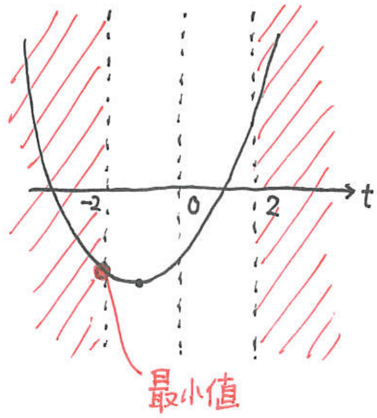
∴ 負になることはない

(i)〜(iii)より.

$a<-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}<a$ //

(ii)のときのグラフ





(iii)のときのグラフ