0001835274618999

富山大学

2014年 第1問　1枚目／2枚.

数理 石井K

$\boxed{1}$ 曲線 $C: y=\dfrac{4}{x}$ 上に2点 P(1, 4), Q(4, 1) をとる．直線 $\ell: y=kx$ $(k<0)$ に垂直な直線でPを通るものを ℓ_P とし，Qを通るものを ℓ_Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ℓ_P, ℓ_Q の方程式を求めよ．

(2) ℓ_P と ℓ の交点Rの x 座標を求めよ．また，ℓ_Q と ℓ の交点Sの x 座標を求めよ．

(3) C, ℓ, ℓ_P, ℓ_Q で囲まれた図形の面積 M を求めよ．

(4) k を動かすとき，M の最大値を求めよ．

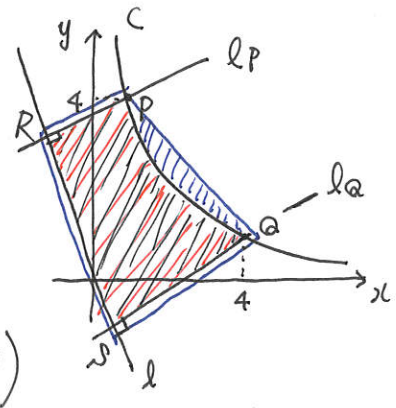
(1) ℓ_P と ℓ_Q は ℓ に垂直なので，ともに傾きは $-\frac{1}{k}$

$\therefore \ell_P: y=-\frac{1}{k}(x-1)+4 \quad \therefore \underline{\ell_P: y=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}+4}$

$\ell_Q: y=-\frac{1}{k}(x-4)+1 \quad \therefore \underline{\ell_Q: y=-\frac{1}{k}x+\frac{4}{k}+1}$

(2) $-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}+4-kx=0$ より． $\underline{x=\dfrac{4k+1}{k^2+1}}$

$-\frac{1}{k}x+\frac{4}{k}+1-kx=0$ より． $\underline{x=\dfrac{k+4}{k^2+1}}$



(3) 台形から青い部分を引けばよい．

ここで 直線PQは $y=-x+5$

(2)より．$R\left(\dfrac{4k+1}{k^2+1}, \dfrac{4k^2+k}{k^2+1}\right)$，$S\left(\dfrac{k+4}{k^2+1}, \dfrac{k^2+4k}{k^2+1}\right)$

$\therefore PR^2=\left(1-\dfrac{4k+1}{k^2+1}\right)^2+\left(4-\dfrac{4k^2+k}{k^2+1}\right)^2=\dfrac{(k-4)^2}{k^2+1} \quad \therefore PR=\dfrac{4-k}{\sqrt{k^2+1}}$ $(\because k<0)$

$SQ^2=\left(4-\dfrac{k+4}{k^2+1}\right)^2+\left(1-\dfrac{k^2+4k}{k^2+1}\right)^2=\dfrac{(4k-1)^2}{k^2+1} \quad \therefore SQ=\dfrac{1-4k}{\sqrt{k^2+1}}$

$SR^2=\left(\dfrac{4k+1-k-4}{k^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{4k^2+k-k^2-4k}{k^2+1}\right)^2=\dfrac{(k-1)^2\cdot 9(k^2+1)}{(k^2+1)^2} \quad \therefore SR=\dfrac{3(1-k)}{\sqrt{k^2+1}}$

$\therefore M=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4-k+1-4k}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\dfrac{3(1-k)}{\sqrt{k^2+1}}-\displaystyle\int_1^4 -x+5-\frac{4}{x}\,dx$

$=\dfrac{-5k+5}{2\sqrt{k^2+1}}\cdot\dfrac{3(1-k)}{\sqrt{k^2+1}}-\left[-\dfrac{x^2}{2}+5x-4\log x\right]_1^4$

$=\dfrac{15(1-k)^2}{2(k^2+1)}-\dfrac{15}{2}+8\log 2=\underline{-\dfrac{15k}{k^2+1}+8\log 2}$

0001835274618999

富山大学

2014年 第1問　　2枚目/2枚.

数理 石井K

$\boxed{1}$ 曲線 $C : y = \dfrac{4}{x}$ 上に2点 P(1, 4), Q(4, 1) をとる．直線 $\ell : y = kx$ $(k < 0)$ に垂直な直線でPを通るものを ℓ_{P} とし，Qを通るものを ℓ_{Q} とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ℓ_{P}, ℓ_{Q} の方程式を求めよ．

(2) ℓ_{P} と ℓ の交点Rの x 座標を求めよ．また，ℓ_{Q} と ℓ の交点Sの x 座標を求めよ．

(3) C, ℓ, ℓ_{P}, ℓ_{Q} で囲まれた図形の面積 M を求めよ．

(4) k を動かすとき，M の最大値を求めよ．

(4) (3)の M を $M(k)$ とおくと，

$$M'(k) = -\frac{15(k^2+1) - 15k\cdot 2k}{(k^2+1)^2}$$

$$= \frac{15(k+1)(k-1)}{(k^2+1)^2}$$

∴ $k<0$ より．$M'(k)=0$ となるのは $k=-1$ のとき．

k	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)
$M'(k)$	$+$	0	$-$	
$M(k)$	$\nearrow$		$\searrow$	

∴ M の最大値は $M(-1)$ であり．

$$M(-1) = \underline{\frac{15}{2} + 8\log 2 \quad (k=-1 \text{のとき})} \quad //$$