東京工業大学

2014年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 点P$(t,\ s)$が$s=\sqrt{2}t^2-2t$を満たしながらxy平面上を動くときに，点Pを原点を中心として45°回転した点Qの軌跡として得られる曲線をCとする．さらに，曲線Cとx軸で囲まれた図形をDとする．

(1) 点Q$(x,\ y)$の座標をtを用いて表せ．

(2) 直線$y=a$と曲線Cがただ1つの共有点を持つような定数aの値を求めよ．

(3) 図形Dをy軸のまわりに1回転して得られる回転体の体積Vを求めよ．

(1) 複素数を用いて点Pを原点を中心として45°回転する

$$(t+si)(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t-s)+\frac{1}{\sqrt{2}}(t+s)i$$

∴ Q(x,y)は，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(t-s)$ …①，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+s)$ …② をみたす

①，②に$s=\sqrt{2}t^2-2t$を代入して，$\underline{Q\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2,\ t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}$ //

(2) (1)より，$t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}=a \iff t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}-a=0$

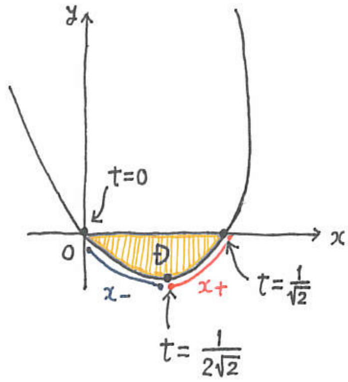
これが重解をもてばよいので，判別式をDとおくと，

$$D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4a=0 \qquad \therefore\ \underline{a=-\frac{1}{8}}\ //$$

(3) (2)のとき，$\left(t-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=0 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Cは放物線 $y=\sqrt{2}x^2-2x$ を回転したもので

右のような図形になる．



$$\therefore V=\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi x_+^2\,dy-\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi x_-^2\,dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2\cdot\frac{dy}{dt}\cdot dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}x^2\cdot\frac{dy}{dt}\cdot dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)^2\cdot\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2t^5-\frac{13}{\sqrt{2}}t^4+12t^3-\frac{9}{2\sqrt{2}}t^2\,dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{13}{5\sqrt{2}}t^5+3t^4-\frac{3}{2\sqrt{2}}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{24}-\frac{13}{40}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)$$

$$=\underline{\frac{11}{120}\pi}\ //$$