2015年 理学部（物理）第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 二つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = \frac{1}{2}(x-a)^2 + b$$

がある．ただし，a, b は実数であり，$b > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 接線 ℓ が C_2 にも接する場合の p を a と b を用いて表せ．

(3) (2) より C_1, C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することがわかる．この二つの直線の交点 Q の座標を a と b を用いて表せ．

(4) 放物線 C_2 の頂点が曲線 $y = e^{-2x^2}$ 上を動くとき，交点 Q の軌跡を $y = f(x)$ で表す．関数 $f(x)$ を求めよ．また $f(x)$ の増減と凹凸を調べ軌跡の概形をかけ．

(1) $y' = 2x$ より，$\ell : y = 2p(x-p) + p^2$　$\therefore \underline{\ell : y = 2px - p^2}$ //

(2) $\frac{1}{2}(x-a)^2 + b - (2px - p^2) = 0$ が重解をもつ

$\therefore$ $x^2 - 2(a+2p)x + a^2 + 2b + 2p^2 = 0$ の判別式を D とすると，

$$D/4 = (a+2p)^2 - (a^2+2b+2p^2)$$
$$= 2(p^2 + 2ap - b)$$

$\therefore$ D = 0 より，$\underline{p = -a \pm \sqrt{a^2+b}}$ //

(3) $p_1 = -a - \sqrt{a^2+b}$，$p_2 = -a + \sqrt{a^2+b}$ とおくと，(1) より 2本の直線は，

$y = 2p_1 x - p_1^2$ …① と $y = 2p_2 x - p_2^2$ …② と表せる

ここで，$p_1 + p_2 = -2a$，$p_1 p_2 = -b$ である．①，② より，

$2(p_1 - p_2)x - (p_1^2 - p_2^2) = 0$　　$p_1 \neq p_2$ より，$x = \frac{p_1+p_2}{2} = -a$

このとき①より，$y = 2(-a-\sqrt{a^2+b})\cdot(-a) - (-a-\sqrt{a^2+b})^2 = -b$　　$\therefore \underline{Q(-a, -b)}$ //

(4) C_2 の頂点 (a, b) が $y = e^{-2x^2}$ 上を動くとき，$b = e^{-2a^2}$ が成り立つ

$Q(X, Y)$ とおくと (3) より，$X = -a$，$Y = -b$　$\therefore -Y = e^{-2(-X)^2}$　$\therefore Y = -e^{-2X^2}$

$\therefore \underline{f(x) = -e^{-2x^2}}$ //

$$f'(x) = 4xe^{-2x^2}$$

$$f''(x) = 4e^{-2x^2} + 4x\cdot(-4x)e^{-2x^2} = -4(2x+1)(2x-1)e^{-2x^2}$$

2枚目へつづく

0002102547987999

山形大学

2015年 理学部（物理） 第1問 2枚目／2枚

数理 石井K

1 二つの放物線

$C_1 : y = x^2$

$C_2 : y = \frac{1}{2}(x-a)^2 + b$

がある．ただし，a, b は実数であり，$b > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_1 上の点 $P(p,\ p^2)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 接線 ℓ が C_2 にも接する場合の p を a と b を用いて表せ．

(3) (2) より C_1, C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することがわかる．この二つの直線の交点 Q の座標を a と b を用いて表せ．

(4) 放物線 C_2 の頂点が曲線 $y = e^{-2x^2}$ 上を動くとき，交点 Q の軌跡を $y = f(x)$ で表す．関数 $f(x)$ を求めよ．また $f(x)$ の増減と凹凸を調べ軌跡の概形をかけ．

(4) のつづき

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	-1	↗	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -e^{-2x^2} = 0$$

$\therefore$ $y = f(x)$ のグラフは下のようになる．