

2015年理学部(物理)第1問

1枚目/2枚



1 二つの放物線

$$C_1: y = x^2$$

$$C_2: y = \frac{1}{2}(x-a)^2 + b$$

がある。ただし、 $a, b$ は実数であり、 $b > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線  $C_1$  上の点  $P(p, p^2)$  における接線  $l$  の方程式を求めよ。
- (2) 接線  $l$  が  $C_2$  にも接する場合の  $p$  を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (3) (2) より  $C_1, C_2$  の両方に接する直線が2本存在することがわかる。この二つの直線の交点  $Q$  の座標を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (4) 放物線  $C_2$  の頂点が曲線  $y = e^{-2x^2}$  上を動くとき、交点  $Q$  の軌跡を  $y = f(x)$  で表す。関数  $f(x)$  を求めよ。また  $f(x)$  の増減と凹凸を調べ軌跡の概形をかけ。

$$(1) y' = 2x \text{ より, } l: y = 2p(x-p) + p^2 \quad \therefore \underline{l: y = 2px - p^2} //$$

$$(2) \frac{1}{2}(x-a)^2 + b - (2px - p^2) = 0 \text{ が重解をもつ}$$

$$\therefore x^2 - 2(a+2p)x + a^2 + 2b + 2p^2 = 0 \text{ の判別式をDとすると,}$$

$$D/4 = (a+2p)^2 - (a^2 + 2b + 2p^2)$$

$$= 2(p^2 + 2ap - b)$$

$$\therefore D = 0 \text{ より, } \underline{p = -a \pm \sqrt{a^2 + b}} //$$

$$(3) p_1 = -a - \sqrt{a^2 + b}, p_2 = -a + \sqrt{a^2 + b} \text{ とおくと, (1) より 2本の直線は,}$$

$$y = 2p_1x - p_1^2 \cdots \textcircled{1} \text{ と } y = 2p_2x - p_2^2 \cdots \textcircled{2} \text{ と表せる}$$

$$\text{ここで, } p_1 + p_2 = -2a, p_1 p_2 = -b \text{ である. } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より,}$$

$$2(p_1 - p_2)x - (p_1^2 - p_2^2) = 0 \quad p_1 \neq p_2 \text{ より, } x = \frac{p_1 + p_2}{2} = -a$$

$$\text{このとき } \textcircled{1} \text{ より, } y = 2(-a - \sqrt{a^2 + b}) \cdot (-a) - (-a - \sqrt{a^2 + b})^2 = -b \quad \therefore \underline{Q(-a, -b)} //$$

$$(4) C_2 \text{ の頂点, } (a, b) \text{ が } y = e^{-2x^2} \text{ 上を動くとき, } b = e^{-2a^2} \text{ が成り立つ}$$

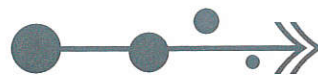
$$Q(x, Y) \text{ とおくと (3) より, } X = -a, Y = -b \quad \therefore -Y = e^{-2(-x)^2} \quad \therefore Y = -e^{-2x^2}$$

$$\therefore \underline{f(x) = -e^{-2x^2}} //$$

$$f'(x) = 4xe^{-2x^2}$$

$$f''(x) = 4e^{-2x^2} + 4x \cdot (-4x)e^{-2x^2} = -4(2x+1)(2x-1)e^{-2x^2}$$

2枚目へつづく



2015年理学部(物理)第1問

2枚目/2枚

1 二つの放物線

$$C_1: y = x^2$$

$$C_2: y = \frac{1}{2}(x-a)^2 + b$$

がある。ただし、 $a, b$ は実数であり、 $b > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線  $C_1$  上の点  $P(p, p^2)$  における接線  $l$  の方程式を求めよ。
- (2) 接線  $l$  が  $C_2$  にも接する場合の  $p$  を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (3) (2) より  $C_1, C_2$  の両方に接する直線が2本存在することがわかる。この二つの直線の交点  $Q$  の座標を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (4) 放物線  $C_2$  の頂点が曲線  $y = e^{-2x^2}$  上を動くとき、交点  $Q$  の軌跡を  $y = f(x)$  で表す。関数  $f(x)$  を求めよ。また  $f(x)$  の増減と凹凸を調べ軌跡の概形をかけ。

(4)のつづき

$x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\curvearrowright$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -e^{-2x^2} = 0$$

$\therefore y = f(x)$  のグラフは下のようになる。

