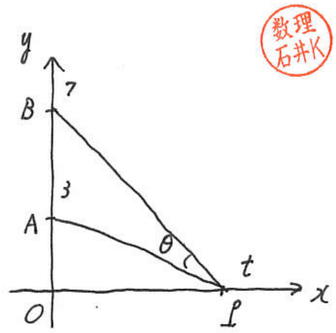
0001866633318999

鳥取大学

2014年第2問



2 x 軸の正の部分を動く点 P(t, 0) ($t>0$) と 2 点 A(0, 3), B(0, 7) がある.

(1) 3点 A, B, P を通る円の中心の座標を t を用いて表せ.

(2) 2点 A, B を通り, x 軸の正の部分に接する円の方程式を求めよ.

(3) ∠APB の大きさを最大にする点 P の座標を求めよ.

(1) AP の垂直二等分線は

$y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{3}{2}$　　$\therefore\ y=\frac{t}{3}x-\frac{t^2}{6}+\frac{3}{2}$ ―①

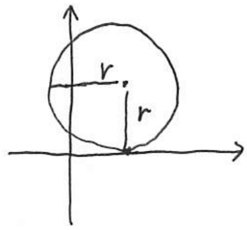
AB の垂直二等分線は　$y=5$ ―②

①②より交点は.　$5=\frac{t}{3}x-\frac{t^2}{6}+\frac{3}{2}$　　$\therefore\ 15=tx-\frac{t^2}{2}+\frac{9}{2}$

$\therefore\ tx=\frac{21}{2}+\frac{t^2}{2}$　　$t>0$ より.　$x=\frac{t^2+21}{2t}$　　$\therefore\ \left(\frac{t^2+21}{2t},\ 5\right)$ //

(2) この円の半径を $r\ (>0)$ とすると.

②より $r=5$ とわかる.



$\therefore\ (x-a)^2+(y-5)^2=25$

これに $(0,3)$ を代入して.　$a^2=21$

x軸の正の部分に接するから $a>0$　$\therefore\ a=\sqrt{21}$

$\therefore\ (x-\sqrt{21})^2+(y-5)^2=25$ //

(2) を使って, すなおに誘導にのればよかった…

(3) $\angle APB=\theta$ とおくと $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ より.　∠APB が最大 $\Longleftrightarrow$ $\tan\theta$ が最大

$$\tan\theta=\frac{\tan\angle BPO-\tan\angle APO}{1+\tan\angle BPO\cdot\tan\angle APO}$$

$$=\frac{\frac{7}{t}-\frac{3}{t}}{1+\frac{7}{t}\cdot\frac{3}{t}}$$

$$=\frac{4t}{t^2+21}$$

ここで $\tan\theta$：最大 $\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{\tan\theta}$：最小なので

$\tan\theta>0$ より.

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{t^2+21}{4t}$$

$$=\frac{1}{4}t+\frac{21}{4t}$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{t}{4}\cdot\frac{21}{4t}}\quad(\text{相加・相乗})$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{21}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

等号成立は $\frac{t}{4}=\frac{21}{4t}$ すなわち $t=\sqrt{21}$

$\therefore\ P(\sqrt{21},\ 0)$ //