京都大学

2014年 文系 第4問

数理 石井K

4 次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 次の不等式

$$a_n{}^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

(1) $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

∴ 数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 1$, 公比 2 の等比数列

∴ $a_n - 1 = 2^{n-1}$ ∴ $\underline{a_n = 2^{n-1} + 1}$ //

(2) 不等式を a_n について解くと, (1)より $a_n > 0$ なので

$a_n > 1 + \sqrt{1 + 10^{15}}$

これと(1)より, $2^{n-1} > \sqrt{1 + 10^{15}}$

両辺とも正なので, 2乗して, $2^{2n-2} > 1 + 10^{15}$

ここで, (左辺)は $n \geqq 2$ のとき偶数, (右辺)は奇数なので,

$2^{2n-2} = 1 + 10^{15}$ が $n \geqq 2$ のとき, 成り立つことはない. また, $n=1$ のときも成り立たない

∴ $2^{2n-2} > 1 + 10^{15} \iff 2^{2n-2} > 10^{15}$

両辺, 底10の対数をとると, $(2n-2)\log_{10} 2 > 15$

$$\therefore\ 2n - 2 > \frac{15}{\log_{10} 2}$$

$$\therefore\ n > 1 + \frac{15}{2\log_{10} 2}$$

ここで, $\underbrace{1 + \frac{15}{2 \cdot 0.3011}}_{\fallingdotseq 25.91} < 1 + \frac{15}{2\log_{10} 2} < \underbrace{1 + \frac{15}{2 \cdot 0.3010}}_{\fallingdotseq 25.92}$ ∴ $\underline{n = 26}$ //