

2014年第22問

22 曲線 $y = \sqrt{x-1}$ 上 ($x > 1$) の点 A と点 B(3, -1) を結ぶ線分 AB の長さの最小値を m とする. m^2 の値を求めよ.

$$A(t, \sqrt{t-1}) \text{ とおくと. } (t > 1)$$

$$AB^2 = (t-3)^2 + (\sqrt{t-1} + 1)^2$$

$$= t^2 - 6t + 9 + t - 1 + 1 + 2\sqrt{t-1}$$

$$= t^2 - 5t + 9 + 2\sqrt{t-1}$$

$$\text{ここで, } u = \sqrt{t-1} \text{ とおくと, } (u > 0) \quad t = u^2 + 1$$

$$\therefore AB^2 = (u^2 + 1)^2 - 5(u^2 + 1) + 9 + 2u$$

$$= u^4 + 2u^2 + 1 - 5u^2 - 5 + 9 + 2u$$

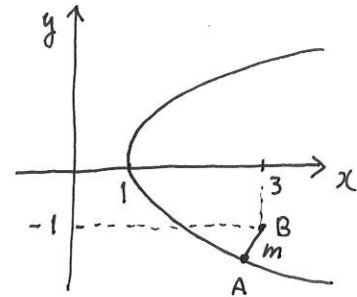
$$= \underline{u^4 - 3u^2 + 2u + 5}$$

$f(u)$ とおく

$$f'(u) = 2(u-1)(2u^2 + 2u - 1)$$

$$\therefore u > 0 \text{ で } f'(u) = 0 \text{ とおきの } u = 1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\therefore \underline{m^2 = 5}$$



u	(0)	...	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$...	1	...	(∞)
$f'(u)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(u)$	(5)	↗		↘	5	↗	(∞)

最小