鳥取大学

2016年 工・農・医（生命科学） 第4問

4 曲線 $C : x^4 - 2xy + y^2 = 0$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) C 上の点 $(x,\ y)$ に対して，y を x の式で表し，x の値の取り得る範囲を求めよ．

(2) C 上の点で，x 座標が最大となる点と，y 座標が最大となる点をそれぞれ求めよ．

(3) C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y^2 - 2xy + x^4 = 0$

$$\therefore\ y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^4}}{2}$$

$$\therefore\ y = x \pm |x|\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\ \underline{y = x \pm x\sqrt{1-x^2}\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)}\ //$$

(2) $x=1$ のとき，$y=1$ であるから，x 座標が最大となる点は $\underline{(1,\ 1)}$ //

$y_+ = x + x\sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$，$y_- = x - x\sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ とおくと，

$$y_+' = 1 + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (-1 < x < 1)$$

$$= 1 + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (-1 < x < 1)$$

$$\therefore\ y_+' = 0 \iff 2x^2 - 1 = \sqrt{1-x^2}\ \ (-1 < x < 1)$$

$$\iff 4x^4 - 4x^2 + 1 = 1 - x^2 \text{ かつ } 2x^2 - 1 > 0 \text{ かつ } -1 < x < 1$$

$$\iff x^2(4x^2 - 3) = 0 \text{ かつ } \left(-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1\right)$$

$$\iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

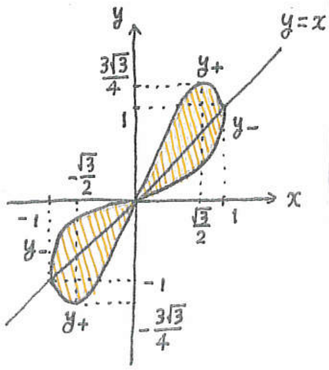
x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
y_+'	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
y_+	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

左の増減表より

y 座標が最大となる点は $\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$ //

(3) $y = x + x\sqrt{1-x^2}$ と $y = x - x\sqrt{1-x^2}$ のグラフは $y=x$ に関して対称であるから，

増減表より，右のグラフとなる．



$$S = \int_{-1}^{0} y_- - y_+\,dx + \int_0^1 y_+ - y_-\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -2x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$t = 1 - x^2$ とおいて置換積分すると，$dt = -2x \cdot dx$，$\begin{array}{c||c} x & 0 \to 1 \\ t & 1 \to 0 \end{array}$

$$S = 2\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = 2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \underline{\frac{4}{3}}\ //$$