2014年 薬学部（B前期） 第4問

数理 石井K

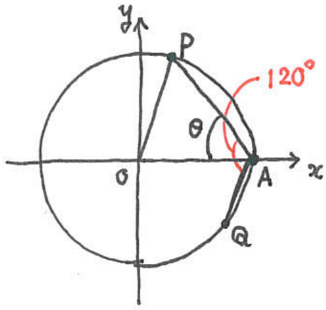
$\boxed{4}$ 中心O，半径1の円周上に定点Aと動点P，Qがあり，P，Qは常に $\angle PAQ = 120^\circ$ を満たしながら動いている．$\angle OAP = \theta$ として次の各問に答えよ．ただし，$*$ については $+$，$-$ の1つが入る．

(1) θ の動ける範囲は $\boxed{あい}$ 30 $^\circ < \theta <$ $\boxed{うえ}$ 90 $^\circ$ である．

(2) AP，AQ を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表すと，

$$AP = \boxed{お}\ (2)\cos\theta,\quad AQ = \sqrt{\boxed{か}\ (3)}\sin\theta + \boxed{*き}\ (-1)\cos\theta$$

となる．



(3) △OPQ の面積は，点P，Qがどこにあっても常に $\dfrac{\sqrt{\boxed{く}\ (3)}}{\boxed{け}\ (4)}$ である．

(4) △APQ の面積 $S(\theta)$ を $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて表すと，

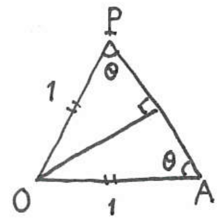
$$S(\theta) = \frac{\boxed{こ}\ (3)}{\boxed{さ}\ (4)}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{\boxed{し}\ (3)}}{\boxed{す}\ (4)}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{\boxed{せ}\ (3)}}{\boxed{そ}\ (4)}$$

となり，$S(\theta)$ は $\theta = \boxed{たち}$ 60 $^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{つ}\ (3)}}{\boxed{て}\ (4)}$ をとる．

(1) $\angle PAQ = 120^\circ$ より，点P，Qは直線OAに関して互いに反対側にある

$\angle OAP = \theta < 90^\circ$ となり同様に，$\angle OAQ < 90^\circ$

$\therefore\ 120^\circ - \theta < 90^\circ$ となり，$\theta > 30^\circ$　以上より，$\underline{30^\circ < \theta < 90^\circ}$ //



(2) OA = OP より △OAP は二等辺三角形であり，$\angle OAP = \angle OPA = \theta$

$\therefore\ \underline{AP = 2\cos\theta}$ //

同様にして，$AQ = 2\cos(120^\circ - \theta) = \underline{\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta}$ //

(3) $\angle POQ = 120^\circ$ より，$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 120^\circ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ //

(4) $S(\theta) = \frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot \sin 120^\circ$

$= \cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= \underline{\frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}}$ //

合成

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\theta - 30^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$30^\circ < 2\theta - 30^\circ < 150^\circ$ より，

$S(\theta)$ は $2\theta - 30^\circ = 90^\circ$

すなわち $\underline{\theta = 60^\circ}$ // のとき

最大値 $\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ // をとる．