



2016年文系第4問

4 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
 (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
 (3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= 24x^2 - 6 \\ &= 24\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{また、} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3 - 1 = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 3 - 1 = -3$$

よって、増減表は右上のようになり、グラフは右となる。

よって $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3個。

$$(2) \text{ 3倍角の公式より、} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(a) &= 8a^3 - 6a - 1 \\ &= 2\left(4\cos^3\frac{5\pi}{9} - 3\cos\frac{5\pi}{9}\right) - 1 \\ &= 2 \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - 1 \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3} \text{ より、} \underline{-\frac{1}{2} < \cos \frac{5\pi}{9} < 0}$$

これより、上のグラフの赤丸の真ん中が $\cos \frac{5\pi}{9}$ であると分かる。

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{125} + \frac{6}{5} - 1 = \frac{17}{125}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{8}{216} + 1 - 1 = -\frac{1}{27}$$

$$(2) \text{より、} f\left(\cos \frac{5\pi}{9}\right) = 0$$

$$\text{以上より、} f\left(-\frac{1}{6}\right) < f\left(\cos \frac{5\pi}{9}\right) < f\left(-\frac{1}{5}\right)$$

 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ において、 $y = f(x)$ のグラフは単調減少であるから、

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

x	\dots	$-\frac{1}{2}$	\dots	$\frac{1}{2}$	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	1	\searrow	-3	\nearrow

極大 極小

