富山大学

2014年 薬学部 第2問

$\boxed{2}$ 点 P_0 を xy 平面の原点とし，点 P_1 の座標を $(1,\ 0)$ とする．点 P_2，P_3，P_4，$\cdots$ を次のように定める．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 P_{n-1} を中心として点 P_n を反時計回りに θ $(0<\theta<\pi)$ だけ回転させた点を Q_n とし，点 P_{n+1} を $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_n}=\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ となるようにとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left\{-\sin\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right)+\sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right)\right\}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right)-\cos\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right)\right\}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)+\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$\sin\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)+\cos\frac{\theta}{2}\right\}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 点 P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおくとき，x_n および y_n を求めよ．

(4) すべての点 P_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を通る円の方程式を求めよ．