

2015年工(機工, 原工, 都市工)・知識工第2問

 数理  
石井K

2 次の問に答えよ。

(1) 関数  $f(x) = xe^{-2x}$  に対し,  $f'(x)$  と  $f''(x)$  を求めよ。(2)  $n$  を自然数とし,  $S_n = \sum_{k=1}^n (n+k)^2$  とする.  $S_n$  を  $n$  の式で表し, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$  を求めよ。(3) 定積分  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$  の値を求めよ。

$$(1) f'(x) = e^{-2x} + x \cdot (-2e^{-2x}) = \underline{(1-2x)e^{-2x}} //$$

$$f''(x) = -2e^{-2x} + (1-2x) \cdot (-2e^{-2x}) = \underline{4(x-1)e^{-2x}} //$$

$$(2) S_n = n^2 \sum_{k=1}^n 1 + 2n \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= n^2 \cdot n + 2n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= n^3 + n^2(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \underline{\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)} //$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(7 + \frac{1}{n}\right) = \underline{\frac{7}{3}} //$$

$$(3) (\text{与式}) = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad \begin{array}{l} \nearrow t=1+\sqrt{x} \text{ とおくと. } dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \end{array}$$

$$= \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 - \int_2^3 \frac{1}{t} \cdot 2(t-1) dt$$

$$= 4 - 2 - 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= 2 - 2 \left[ t - \log t \right]_2^3$$

$$= 2 - 2(3 - \log 3 - 2 + \log 2)$$

$$= \underline{2(\log 3 - \log 2)} //$$

$$\begin{array}{l|l} x & 1 \rightarrow 4 \\ \hline t & 2 \rightarrow 3 \end{array}$$