

2015年工(機工, 原工, 都市工)・知識工第3問


3  $i$  を虚数単位とする。実数  $x$  に対し

$$\frac{1}{x-2i} = u + iv \quad (u, v \text{ は実数})$$

と表すとき、次の問に答えよ。

(1)  $u$  と  $v$  を  $x$  で表せ。(2)  $\frac{du}{dx}$  と  $\frac{dv}{dx}$  を求めよ。(3) 定積分  $\int_0^2 u dx$  と  $\int_0^2 v dx$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{x-2i} &= \frac{x+2i}{(x-2i)(x+2i)} \\ &= \frac{x}{x^2+4} + \frac{2}{x^2+4} i \end{aligned}$$

$$x \text{ は実数より, } \underline{u = \frac{x}{x^2+4}, v = \frac{2}{x^2+4}} \quad "$$

$$(2) \quad \frac{du}{dx} = \frac{x^2+4-x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} \quad "$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = -\frac{4x}{(x^2+4)^2} \quad "$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^2 u dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log(x^2+4)]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \quad " \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 v dx &= \int_0^2 \frac{2}{x^2+4} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot 2 d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \quad " \end{aligned}$$

 $x = 2 \tan \theta$  とし 置換積分

$$dx = 2 \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad \begin{matrix} x \parallel 0 \rightarrow 2 \\ \theta \parallel 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$