

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問

5 Oを原点とする座標平面上に

放物線  $C_1: y = x^2$ , 円  $C_2: x^2 + (y - a)^2 = 1$  ( $a \geq 0$ )

がある.  $C_2$  の点  $(0, a+1)$  における接線と  $C_1$  が2点 A, B で交わり,  $\triangle OAB$  が  $C_2$  に外接しているとする. 次の問に答えよ.

- (1)  $a$  を求めよ.
- (2) 点  $(s, t)$  を  $(-1, a), (1, a), (0, a-1)$  と異なる  $C_2$  上の点とする. そして点  $(s, t)$  における  $C_2$  の接線と  $C_1$  との2つの交点を  $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$  とする. このとき,  $(\alpha - \beta)^2 - \alpha^2\beta^2$  は  $s, t$  によらない定数であることを示せ.
- (3) (2) において, 点  $P(\alpha, \alpha^2)$  から  $C_2$  への2つの接線が再び  $C_1$  と交わる点を  $Q(\beta, \beta^2), R(\gamma, \gamma^2)$  とする.  $\beta + \gamma$  および  $\beta\gamma$  を  $\alpha$  を用いて表せ.
- (4) (3) の2点 Q, R に対し, 直線 QR は  $C_2$  と接することを示せ.