

2015年工（工業化・経営工・機械工）第1問

1 内に0から9までの数字を1つずつ入れよ。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は、上位の桁を0として、右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし、値が整数の場合は分母を1としなさい。根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(1) a を 0 でない実数の定数とし、曲線 $C: y = ax^2 - 1$ および直線 $\ell: x + y = 0$ を考える。

(i) $a = 1$ とする。曲線 C 上の2点 (ア, イ) と (ウ, エ) は直線 ℓ に関して対称である。

(ii) 曲線 C 上に、直線 ℓ に関して対称である、異なる2点が存在するとき、定数 a のとり得る値の範囲は

$$a > \frac{\begin{array}{c} \text{オ} \\ \hline \text{カ} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{カ} \\ \hline \text{カ} \end{array}}$$

である。

(2) 座標平面上に4点 $A(0, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 2)$, $C(2\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+2)$, $D(-1, \sqrt{3})$ を頂点とする長方形 $ABCD$ がある。点 P_0 を辺 AB の中点とし、条件

$$\angle P_0 P_1 B = \angle P_2 P_1 C, \quad \angle P_1 P_2 C = \angle P_3 P_2 D, \quad \angle P_2 P_3 D = \angle P_4 P_3 A$$

を満たすように、辺 BC , CD , DA , AB 上にそれぞれ点 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 を図のようにとる。

点 P_4 の x 座標 x_4 が $\sqrt{3} < x_4 < 2\sqrt{3}$ を満たすとき、点 P_1 , P_2 , P_3 の x 座標 x_1 , x_2 , x_3 のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{ア} \\ \hline \text{イ} \end{array} \sqrt{\begin{array}{c} \text{ウ} \\ \hline \text{エ} \end{array}} - \begin{array}{c} \text{ウ} \\ \hline \text{エ} \end{array} &< x_1 < \begin{array}{c} \text{オ} \\ \hline \text{カ} \end{array} \sqrt{\begin{array}{c} \text{カ} \\ \hline \text{カ} \end{array}} - \begin{array}{c} \text{キ} \\ \hline \text{ク} \end{array}, \\ \begin{array}{c} \text{ケ} \\ \hline \text{コ} \end{array} \times \sqrt{\begin{array}{c} \text{サ} \\ \hline \text{サ} \end{array}} - \begin{array}{c} \text{シ} \\ \hline \text{セ} \end{array} &< x_2 < \sqrt{\begin{array}{c} \text{ス} \\ \hline \text{ス} \end{array}} - \begin{array}{c} \text{セ} \\ \hline \text{セ} \end{array}, \\ -\begin{array}{c} \text{ソ} \\ \hline \text{タ} \end{array} &< x_3 < -\begin{array}{c} \text{チ} \\ \hline \text{ツ} \end{array} \end{aligned}$$

である。

(3) a を実数の定数とし、 x に関する方程式 $\frac{\log(3-x^2+2x)}{\log(x-a)} = 2$ を考える。この方程式が実数解をもつとき、実数 a のとり得る値の範囲は

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{ア} \\ \hline \text{イ} \end{array} - \begin{array}{c} \text{イ} \\ \hline \text{ウ} \end{array} \sqrt{\begin{array}{c} \text{ウ} \\ \hline \text{エ} \end{array}} \leq a &< \sqrt{\begin{array}{c} \text{エ} \\ \hline \text{エ} \end{array}}, \\ \sqrt{\begin{array}{c} \text{オ} \\ \hline \text{オ} \end{array}} < a &< \begin{array}{c} \text{カ} \\ \hline \text{カ} \end{array} \end{aligned}$$

である。

ただし、正の数 A に対して、 $\log A$ は A の自然対数を表す。