

2012年理工（物理・応用生物科・経営工）第1問

1 次の文章中の から までに当てはまる数字0~9を求めて記入せよ。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の関係式を満たすとする。

$$a_1 = 0, \quad \begin{cases} b_n = \frac{1}{5}a_n + 1 \\ a_{n+1} = 3b_n + 2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $b_1 = \text{ア}$ で、 $n \geq 1$ に対して $b_{n+1} = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} b_n + \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ となる。これより、

$$b_n = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} - \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \left(\frac{\text{コ}}{\text{サ}} \right)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$$

となる。また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_n) = \frac{\text{タ} \text{チ} \text{ツ}}{\text{テ} \text{ト}}$$

である。

(2) 複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して、複素数 ω を

$$\omega = (4 + 3i)z + 6i\bar{z}$$

で定める。ただし、 i は虚数単位を、 $\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$ は z と共役な複素数を表す。いま z の実部と虚部がともに0以上となる範囲で θ を動かす。このとき、 ω の実部の最大値は 、最小値は であり、 $\omega\bar{\omega}$ の最大値は 、最小値は である。ただし、 $\bar{\omega}$ は ω と共役な複素数を表す。

(3) $x > 0$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が、

$$f'(x) = 2 \log x + \frac{1}{7-2e} \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt, \quad f(1) = 0$$

を満たすとする。ここで、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、 \log は自然対数、 e は自然対数の底である。 $f(x)$ を求めると、

$$f(x) = \text{フ} x \log x - \frac{\text{ヘ}}{\text{ホ}} x + \frac{\text{マ}}{\text{ミ}} \quad (x > 0)$$



となる。関数 $f(x)$ は $x = e^{-\frac{\text{ム}}{\text{メ}}}$ のとき、最小値

$$-\text{モ} e^{-\frac{\text{ヤ}}{\text{ユ}}} + \frac{\text{ヨ}}{\text{ラ}}$$

をとる。