

2015年工（建築・電気工）第1問

1  内に0から9までの数字を1つずつ入れよ。

(1)  $a$  を正の定数とし、関数

$$f(x) = \tan 2x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{および} \quad g(x) = a \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

に対して、曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  の交点の  $x$  座標を  $\theta$  とする。曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸、および直線  $x = \theta$  で囲まれた部分の面積  $S$  を考える。

(i)  $a = \text{ア}$  のとき、 $\theta = \frac{\pi}{6}$  である。このとき  $S = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \times \log \text{エ}$  である。

(ii)  $a = \sqrt{\text{オ}}$  のとき、 $S = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{7}+1}{2}$  である。

ただし、正の数  $A$  に対して、 $\log A$  は  $A$  の自然対数を表す。

(2) 1個のサイコロを投げ、その出た目によって、点  $P$  を座標平面上で移動させる試行を繰り返す。

点  $P$  の出発点  $(x_0, y_0)$  を原点  $(0, 0)$  とし、1回目の試行（移動）後の点  $P$  の座標を  $(x_1, y_1)$ 、2回目の試行（移動）後の点  $P$  の座標を  $(x_2, y_2)$ 、以下同様に  $k$  回目の試行（移動）後の点  $P$  の座標を  $(x_k, y_k)$  とする。

座標  $(x_k, y_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) は次のルールによって定める。

サイコロを  $k$  回目に投げたとき、出た目を3で割った商を  $q$ 、余りを  $r$  として、 $x_k$  を次のように  $q$  によって定め、

$$\begin{cases} q = 0 & \text{のとき } x_k = x_{k-1} \\ q = 1 & \text{のとき } x_k = x_{k-1} + 1 \\ q = 2 & \text{のとき } x_k = x_{k-1} - 1 \end{cases}$$

$y_k$  を次のように  $r$  によって定める。

$$\begin{cases} r = 0 & \text{のとき } y_k = y_{k-1} \\ r = 1 & \text{のとき } y_k = y_{k-1} + 1 \\ r = 2 & \text{のとき } y_k = y_{k-1} - 1 \end{cases}$$

ただし、サイコロを投げたとき、1から6の目がそれぞれ確率  $\frac{1}{6}$  で出るものとする。

(i)  $(x_2, y_2) = (0, 0)$  である確率は  $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$  であり、 $(x_3, y_3) = (0, 0)$  である確率は  $\frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$  である。

(ii)  $x_k + y_k$  が偶数である確率を  $p_k$  とすると、 $p_1 = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$  であり、

$$p_k = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \cdot \left(-\frac{\text{コ}}{\text{サ}}\right)^k + \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

である。



(3) 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において、辺 OA を 2 : 1 の比に内分する点を P ( $OP : PA = 2 : 1$ )、  
辺 OC を 1 : 2 の比に内分する点を Q ( $OQ : QC = 1 : 2$ )、辺 AB の中点を M とする。

(i)  $MP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ ,  $MQ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$  である。

(ii) 三角形 MPQ の面積は  $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \times \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$  である。

(iii) 辺 BC 上の  $BR = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$  となる点 R は、3 点 M, P, Q で定まる平面上にある。