2015年 理工（物理・応用生物科・経営工） 第1問

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ヨ}}$ までに当てはまる数字0〜9を求めよ．

(1) 実数 a に対し，2つの2次関数

$$f(x) = x^2 - 2a^2x - a^4 - 2a^2 - 8$$
$$g(x) = -x^2 + 2(a^2 - 4)x - 3a^4 - 2a^3 - 16$$

を考える．

(i) すべての実数 x に対して $g(x) < f(x)$ が成り立つための必要十分条件は

$$a > -\boxed{\text{ア}} \quad \text{かつ} \quad a \neq \boxed{\text{イ}}$$

である．

(ii) $g(x)$ の最大値は $-\boxed{\text{ウ}}a^4 - \boxed{\text{エ}}a^3 - \boxed{\text{オ}}a^2$ である．

(iii) 次の条件 (*) を満たす実数 b がただ1つ存在するとする．

(*)　「すべての実数 x に対して $g(x) \leqq b \leqq f(x)$ が成り立つ.」

このとき，

$$a = -\boxed{\text{カ}} \quad \text{または} \quad a = \boxed{\text{キ}}$$

であり，$a = -\boxed{\text{カ}}$ のときは $b = -\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}$，$a = \boxed{\text{キ}}$ のときは $b = -\boxed{\text{コ}}\boxed{\text{サ}}$ である．

(2) 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = -25a_n - 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき

$$\boxed{\text{シ}}\,a_{n+1} + b_{n+1} = \boxed{\text{ス}}\left(\boxed{\text{シ}}\,a_n + b_n\right)$$

であるので，

$$b_n = \boxed{\text{セ}}^{\,n} - \boxed{\text{ソ}}\,a_n$$

である．これにより

$$\frac{a_{n+1}}{\boxed{\text{タ}}^{\,n}} = \frac{a_n}{\boxed{\text{タ}}^{\,n-1}} + 1$$

となる．したがって

$$a_n = n \cdot \boxed{\text{チ}}^{\,n-\boxed{\text{ツ}}}$$

となる．

(3) 平面上に，△ABC とその内部の点 O をとったとき，

$$\mathrm{OA} = 1 + \sqrt{3}$$
$$\mathrm{OB} = \sqrt{3}$$
$$\mathrm{OC} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$$

となっていた．

このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値は $\dfrac{-\boxed{\text{テ}} - \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であるので

$$\angle\mathrm{AOB} = \boxed{\text{ニ}}\boxed{\text{ヌ}}\boxed{\text{ネ}}^\circ$$

である．同様に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\boxed{\text{ノ}} - \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ から

$$\angle\mathrm{AOC} = \boxed{\text{ヒ}}\boxed{\text{フ}}\boxed{\text{ヘ}}^\circ$$

である．したがって，

$$\angle\mathrm{BOC} = \boxed{\text{ホ}}\boxed{\text{マ}}\boxed{\text{ミ}}^\circ$$

となる．また，

$$\sin\boxed{\text{ホ}}\boxed{\text{マ}}\boxed{\text{ミ}}^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ム}}}\left(\boxed{\text{メ}} + \sqrt{\boxed{\text{モ}}}\right)}{4}$$

である．したがって，△ABC の面積は $\boxed{\text{ヤ}} + \dfrac{\boxed{\text{ユ}}\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}}{2}$ である．