東京理科大学

2012年 基礎工 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{9}{2}$$

と定める．さらに，Oを原点とする座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．

(1) 曲線 C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線を ℓ_1 とおく．直線 ℓ_1 の方程式を求めよ．

(2) ℓ_1 を (1) で定めた直線とする．曲線 C と直線 ℓ_1 は点 $(2,\ f(2))$ 以外にもう1つ共有点をもつ．その共有点の x 座標を求めよ．

(3) m を実数とし，原点Oを通る直線 $\ell_2 : y = mx$ を考える．曲線 C と直線 ℓ_2 が共有点をちょうど2個もつときの m の値を求めよ．

(1) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ より．$(2, f(2)) = \left(2, \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{2}\right)$ における接線は．

$y = 2\sqrt{2}(x-2) + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{2}$　　$\therefore \underline{\ell_1 : y = 2\sqrt{2}x - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{2}}$ //

(2) $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{9}{2} = 2\sqrt{2}x - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{2}$ を解く．

$x^3 - 12x + 16 = 0$ となり，これは $x = 2$ を重解にもつことが分かっているので

$(x-2)^2(x+4) = 0$　$\therefore x = 2, -4$　　$x \neq 2$ より．$\underline{x = -4}$ //

(3) 3次関数のグラフ $f(x)$ と直線 $\ell_2 : y = mx$ がちょうど2個の共有点をもつ

$\Longleftrightarrow$ その片方は接点である

$\therefore$ (1)と同様にして．接点を $(t, f(t))$ とおくと．

$\ell_2 : y = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2(x-t) + \frac{\sqrt{2}}{6}t^3 + \frac{9}{2}$

$\therefore \ell_2 : y = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2x - \frac{\sqrt{2}}{3}t^3 + \frac{9}{2}$

$$\therefore \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}t^3 + \frac{9}{2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ m = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \end{cases} \quad \therefore m = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{18}{4} = \underline{\frac{9\sqrt{2}}{4}}$$ //