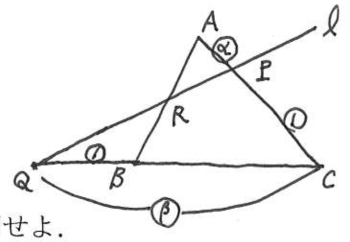
2011年 第2問

2 △ABCの頂点を通らない直線 ℓ が，辺AC，辺BCのB方向への延長線，および辺ABと，それぞれ点P，Q，Rで交わり，

$$AP : PC = \alpha : 1, \quad CQ : QB = \beta : 1$$

であるとする．$\overrightarrow{CA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ として，次の各問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{CR}$ を α，β，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，等式 $\dfrac{AP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QB}\cdot\dfrac{BR}{RA}=1$ を証明せよ．

(2) △QRB，△BCR，△APRの面積比が $1:2:3$ のとき，△APRと△CPRの面積比を求めよ．

(3) (2)のとき，直線CRと直線AQの交点をDとする．線分の長さの比AD : QDを求めよ．

(1) $QR : RP = s : 1-s \ (0<s<1)$ とおくと.

$\overrightarrow{CR} = s\overrightarrow{CP} + (1-s)\overrightarrow{CQ}$　ここで，$\overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CQ} = \dfrac{\beta}{\beta-1}\overrightarrow{CB}$ より.

$\overrightarrow{CR} = \dfrac{s}{1+\alpha}\vec{a} + \dfrac{\beta(1-s)}{\beta-1}\vec{b}$　…①

$BR : RA = t : 1-t \ (0<t<1)$ とおくと.

$\overrightarrow{CR} = (1-t)\vec{b} + t\vec{a}$　…②

①，②と $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ より.　$t = \dfrac{s}{1+\alpha}$，$1-t = \dfrac{\beta(1-s)}{\beta-1}$　$\therefore s = \dfrac{1+\alpha}{1+\alpha\beta}$

$\therefore t = \dfrac{1}{1+\alpha\beta}$　②に代入して.　$\underline{\overrightarrow{CR} = \dfrac{1}{1+\alpha\beta}\vec{a} + \dfrac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\vec{b}}$ //

$\therefore BR : RA = \dfrac{1}{1+\alpha\beta} : \dfrac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} = 1 : \alpha\beta$ より.

$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RA} = \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1}\cdot\frac{1}{\alpha\beta} = 1 \quad ■$$

(2) $\triangle QRB : \triangle BCR : \triangle APR = 1 : \beta-1 : (\beta-1)\times\alpha\beta\times\dfrac{\alpha}{1+\alpha} = 1:2:3$ より.

$\beta = 3$，　$(2\alpha+1)(\alpha-1) = 0$　$\alpha>0$ より.　$\alpha = 1$

このとき.　$\triangle APR : \triangle CPR = \alpha : 1 = \underline{1:1}$ //

(3) (2)のとき.　$\overrightarrow{CR} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{3}{4}\vec{b}$　$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CR}$ より.　$\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{4}k\vec{a} + \dfrac{3}{4}k\vec{b}$

$\vec{b} = \dfrac{\beta-1}{\beta}\overrightarrow{CQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CQ}$ より.　$\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{4}k\vec{a} + \dfrac{1}{2}k\overrightarrow{CQ}$　A，D，Qは一直線上より.

$\dfrac{1}{4}k + \dfrac{1}{2}k = 1$　$\therefore k = \dfrac{4}{3}$　$\therefore \overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CQ}$　$\underline{\therefore AD : QD = 2:1}$ //