

2015年工(建築・電気工) 第1問

1 内に0から9までの数字を1つずつ入れよ。

(1) a を正の定数とし、関数

$$f(x) = \tan 2x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}\right) \text{ および } g(x) = a \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

に対して、曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標を θ とする。曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = \theta$ で囲まれた部分の面積 S を考える。

(i) $a = \boxed{\text{ア}}$ のとき、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。このとき $S = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \times \log \boxed{\text{エ}}$ である。

(ii) $a = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ のとき、 $S = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{7}+1}{2}$ である。

ただし、正の数 A に対して、 $\log A$ は A の自然対数を表す。

(2) 1個のサイコロを投げ、その出た目によって、点Pを座標平面上で移動させる試行を繰り返す。

点Pの出発点 (x_0, y_0) を原点 $(0, 0)$ とし、1回目の試行(移動)後の点Pの座標を (x_1, y_1) 、2回目の試行(移動)後の点Pの座標を (x_2, y_2) 、以下同様に k 回目の試行(移動)後の点Pの座標を (x_k, y_k) とする。

座標 (x_k, y_k) ($k = 1, 2, 3, \dots$) は次のルールによって定める。

サイコロを k 回目に投げたとき、出た目を3で割った商を q 、余りを r として、 x_k を次のように q によって定め、

$$\begin{cases} q = 0 \text{ のとき } x_k = x_{k-1} \\ q = 1 \text{ のとき } x_k = x_{k-1} + 1 \\ q = 2 \text{ のとき } x_k = x_{k-1} - 1 \end{cases}$$

y_k を次のように r によって定める。

$$\begin{cases} r = 0 \text{ のとき } y_k = y_{k-1} \\ r = 1 \text{ のとき } y_k = y_{k-1} + 1 \\ r = 2 \text{ のとき } y_k = y_{k-1} - 1 \end{cases}$$

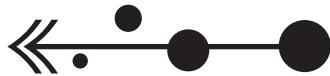
ただし、サイコロを投げたとき、1から6の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で出るものとする。

(i) $(x_2, y_2) = (0, 0)$ である確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり、 $(x_3, y_3) = (0, 0)$ である確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(ii) $x_k + y_k$ が偶数である確率を p_k とすると、 $p_1 = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり、

$$p_k = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \cdot \left(-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^k + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

である。



(3) 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて、辺OAを2:1の比に内分する点をP (OP:PA = 2:1), 辺OCを1:2の比に内分する点をQ (OQ:QC = 1:2), 辺ABの中点をMとする。

(i) $MP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}, MQ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(ii) 三角形MPQの面積は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \times \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(iii) 辺BC上の $BR = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ となる点Rは、3点M, P, Qで定まる平面上にある。