

2015年工（建築・電気工）第1問

1 内に0から9までの数字を1つずつ入れよ。

(1) a を正の定数とし、関数

$$f(x) = \tan 2x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}\right) \text{ および } g(x) = a \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

に対して、曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標を θ とする。曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = \theta$ で囲まれた部分の面積 S を考える。

(i) $a = \text{ア}$ のとき、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。このとき $S = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \times \log \text{エ}$ である。

(ii) $a = \sqrt{\text{オ}}$ のとき、 $S = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{7}+1}{2}$ である。

ただし、正の数 A に対して、 $\log A$ は A の自然対数を表す。

(2) 1個のサイコロを投げ、その出た目によって、点 P を座標平面上で移動させる試行を繰り返す。

点 P の出発点 (x_0, y_0) を原点 $(0, 0)$ とし、1回目の試行（移動）後の点 P の座標を (x_1, y_1) 、2回目の試行（移動）後の点 P の座標を (x_2, y_2) 、以下同様に k 回目の試行（移動）後の点 P の座標を (x_k, y_k) とする。

座標 (x_k, y_k) ($k = 1, 2, 3, \dots$) は次のルールによって定める。

サイコロを k 回目に投げたとき、出た目を3で割った商を q 、余りを r とし、 x_k を次のように q によって定め、

$$\begin{cases} q = 0 \text{ のとき } x_k = x_{k-1} \\ q = 1 \text{ のとき } x_k = x_{k-1} + 1 \\ q = 2 \text{ のとき } x_k = x_{k-1} - 1 \end{cases}$$

y_k を次のように r によって定める。

$$\begin{cases} r = 0 \text{ のとき } y_k = y_{k-1} \\ r = 1 \text{ のとき } y_k = y_{k-1} + 1 \\ r = 2 \text{ のとき } y_k = y_{k-1} - 1 \end{cases}$$

ただし、サイコロを投げたとき、1から6の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で出るものとする。

(i) $(x_2, y_2) = (0, 0)$ である確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ であり、 $(x_3, y_3) = (0, 0)$ である確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$ である。

(ii) $x_k + y_k$ が偶数である確率を p_k とすると、 $p_1 = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ であり、

$$p_k = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \cdot \left(-\frac{\text{コ}}{\text{サ}}\right)^k + \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

である。



(3) 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において、辺 OA を 2 : 1 の比に内分する点を P ($OP : PA = 2 : 1$)、
辺 OC を 1 : 2 の比に内分する点を Q ($OQ : QC = 1 : 2$)、辺 AB の中点を M とする。

(i) $MP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $MQ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(ii) 三角形 MPQ の面積は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \times \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(iii) 辺 BC 上の $BR = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ となる点 R は、3 点 M, P, Q で定まる平面上にある。