2012年 理工（情報科・工業化・機械工・土木工） 第2問

$\boxed{2}$ r を $0 < r < 1$ を満たす実数として，次のように行列とベクトルを定める．

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 2r-1 & 1-r \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

またベクトル $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = Q, \quad Q_n = AQ_{n-1} + P \quad (n \geqq 2)$$

として定める．

(1) $AP = \alpha P$，$AQ = \beta Q$ を満たす定数 α，β を求めよ．

(2) $A^n P$，$A^n Q$ を求めよ．

(3) $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) 座標平面において，各 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し座標が $(a_n,\ 0)$ である点を X_n，座標が $(a_n,\ b_n - a_n)$ である点を Y_n とする．さらに，台形 $X_n X_{n+1} Y_{n+1} Y_n$ の面積を S_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とし，

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$$

とする．

(i) S を求めよ．

(ii) r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき，S の最大値とそのときの r の値を求めよ．