

2012年理（数理情報科・応用物理・応用化学）第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 実数 θ に対し, $O(0, 0, 0)$ を原点とする座標をもつ空間において, 3点

$$P(\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad Q(0, \cos \theta, \sin \theta), \quad R(0, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

を考える。

(i) θ が $-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲を動くとき, PQ^2 の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり, 最大値を与える θ の値は $-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ と $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ である。

(ii) ベクトル \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OR} のなす角を α とする。 θ が $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\cos \alpha$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり, 最大値を与える θ の値は $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ である。 θ が $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\cos \alpha$ の最大値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\cos \alpha$ の最大値は $\boxed{\text{シ}}$ であり, 最大値を与える θ の値は $-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である。

(2) 零行列でない2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が, 等式 $A^2 = 4A$ を満たしているとする。

(i) $bc = 0$ のとき, $a + d$ の値は $\boxed{\text{ソ}}$ または $\boxed{\text{タ}}$ である。 また, $bc \neq 0$ のとき, $a + d = \boxed{\text{チ}}$, $ad - bc = \boxed{\text{ツ}}$ となる。 特に, $b = c > 0$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{(\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}})a} \\ \sqrt{(\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}})a} & \boxed{\text{ヌ}} - \boxed{\text{ネ}} \end{pmatrix}$$

となる。

(ii) 自然数 n に対し,

$$\sum_{k=1}^n {}_n C_k 4^k 3^{n-k} = \boxed{\text{ノ}}^n - \boxed{\text{ハ}}^n$$

であるから,

$$(A + 3E)^n = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} (\boxed{\text{ヘ}}^n - \boxed{\text{ホ}}^n) A + \boxed{\text{マ}}^n E$$

となる。ここで, E は2次の単位行列を表す。