東京理科大学

2012 年 理工（数・建築・電気電子情報工） 第 1 問

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ヒ}}$ までに当てはまる数字 0〜9 を求めよ．ただし，分数は既約分数として表しなさい．

(1) a を実数とするとき，方程式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| = a$$

を考える．この方程式の実数解が 2 個であるための条件は

$$a < \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} < a < \boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}$$

であり，実数解を持たないための条件は

$$a > \boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}$$

である．また，次の不等式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| > 2$$

には，正の整数解が $\boxed{\text{キ}}$ 個，負の整数解が $\boxed{\text{ク}}$ 個ある．

(2) 空間内に点 O，A，B，C があり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，それぞれの大きさと内積が

$$|\vec{a}| = 9, \quad |\vec{b}| = 12, \quad |\vec{c}| = \sqrt{42},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 72, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 57, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 48$$

であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は $\dfrac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が 3 点 A，B，C を通る平面と直交するのは $s = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$t = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のときである．したがって，四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{チ}}\boxed{\text{ツ}}$ である．

(3) 三角関数についての等式

$$\boxed{\text{テ}}\cos^3\theta - \boxed{\text{ト}}\cos\theta - \cos 3\theta = 0$$

を利用して，t に関する 3 次方程式

$$\boxed{\text{テ}}t^3 - \boxed{\text{ト}}t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

を解いたとき，$\cos\frac{3}{4}\pi$ が解の 1 つであることがわかる．したがって，この方程式の残りの 2 つの解は

$$\cos\frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

と

$$\cos\frac{\boxed{\text{ノ}}}{12}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

となる．これより，

$$\tan\frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi=\boxed{\text{ハ}}-\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる．