

2012年理工(数・建築・電気電子情報工) 第1問

1 次の文章中の  ア  ヒ までに当てはまる数字0~9を求めよ。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(1)  $a$  を実数とするとき、方程式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| = a$$

を考える。この方程式の実数解が2個あるための条件は

$$a < \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} < a < \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}$$

であり、実数解を持たないための条件は

$$a > \boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}$$

である。また、次の不等式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| > 2$$

には、正の整数解が  キ 個、負の整数解が  ク 個ある。

(2) 空間内に点O, A, B, Cがあり、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくとき、それぞれの大きさと内積が

$$|\vec{a}| = 9, \quad |\vec{b}| = 12, \quad |\vec{c}| = \sqrt{42},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 72, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 57, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 48$$

であるとする。 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ のなす角は  $\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$  であり、 $\triangle ABC$ の面積は  $\frac{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$  である。ベクトル

$$\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

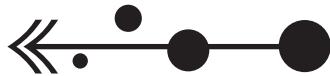
が3点A, B, Cを通る平面と直交するのは  $s = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, t = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$  のときである。したがって、四面体OABCの体積は  チ  ツ である。

(3) 三角関数についての等式

$$\boxed{\text{テ}} \cos^3 \theta - \boxed{\text{ト}} \cos \theta - \cos 3\theta = 0$$

を利用して、 $t$ に関する3次方程式

$$\boxed{\text{テ}} t^3 - \boxed{\text{ト}} t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



を解いたとき、 $\cos \frac{3}{4}\pi$  が解の 1 つであることがわかる。したがって、この方程式の残りの 2 つの解は

$$\cos \frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

と

$$\cos \frac{\boxed{\text{ノ}}}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

となる。これより、

$$\tan \frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi = \boxed{\text{ハ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。