東京理科大学

2012年 理工（物理・応用生物科・経営工） 第1問

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ラ}$ までに当てはまる数字0～9を求めて記入せよ．ただし，分数は既約分数として表しなさい．

(1) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は次の関係式を満たすとする．

$$a_1=0,\quad \begin{cases} b_n=\dfrac{1}{5}a_n+1 \\ a_{n+1}=3b_n+2 \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$b_1=\boxed{ア}$ で，$n \geqq 1$ に対して $b_{n+1}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}b_n+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ となる．これより，

$$b_n=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\left(\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}-b_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

となる。また，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_n)=\frac{\boxed{タ}\boxed{チ}\boxed{ツ}}{\boxed{テ}\boxed{ト}}$$

である．

(2) 複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ に対して，複素数 ω を

$$\omega=(4+3i)z+6i\,\overline{z}$$

で定める．ただし，i は虚数単位を，$\overline{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ は z と共役な複素数を表す．いま z の実部と虚部がともに0以上となる範囲で θ を動かす．このとき，ω の実部の最大値は $\boxed{ナ}$，最小値は $\boxed{ニ}$ であり，$\omega\overline{\omega}$ の最大値は $\boxed{ヌ}\boxed{ネ}\boxed{ノ}$，最小値は $\boxed{ハ}\boxed{ヒ}$ である．ただし，$\overline{\omega}$ は ω と共役な複素数を表す．

(3) $x>0$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が，

$$f'(x)=2\log x+\frac{1}{7-2e}\int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt, \quad f(1)=0$$

を満たすとする．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数，$\log$ は自然対数，e は自然対数の底である．$f(x)$ を求めると，

$$f(x)=\boxed{フ}\,x\log x-\frac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}x+\frac{\boxed{マ}}{\boxed{ミ}} \quad (x>0)$$

となる．関数 $f(x)$ は $x = e^{-\frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}}$ のとき，最小値

$$-\boxed{\text{モ}}\,e^{-\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}} + \frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$$

をとる。