

2012年理工(物理・応用生物科・経営工) 第1問

1 次の文章中の ア から ラ までに当てはまる数字0~9を求めて記入せよ。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(1) 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は次の関係式を満たすとする。

$$a_1 = 0, \quad \begin{cases} b_n = \frac{1}{5}a_n + 1 \\ a_{n+1} = 3b_n + 2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき,  $b_1 = \boxed{\text{ア}}$  で,  $n \geq 1$  に対して  $b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} b_n + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$  となる。これより,

$$b_n = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \left( \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_n) = \frac{\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}} \boxed{\text{ト}}}$$

である。

(2) 複素数  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) に対して, 複素数  $\omega$  を

$$\omega = (4 + 3i)z + 6i\bar{z}$$

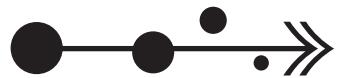
で定める。ただし,  $i$  は虚数単位を,  $\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$  は  $z$  と共に複素数を表す。いま  $z$  の実部と虚部がともに 0 以上となる範囲で  $\theta$  を動かす。このとき,  $\omega$  の実部の最大値は ナ, 最小値は ニ であり,  $\omega\bar{\omega}$  の最大値は ヌ ネ ノ, 最小値は ハ ヒ である。ただし,  $\bar{\omega}$  は  $\omega$  と共に複素数を表す。

(3)  $x > 0$  で定義された微分可能な関数  $f(x)$  が,

$$f'(x) = 2 \log x + \frac{1}{7-2e} \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt, \quad f(1) = 0$$

を満たすとする。ここで,  $f'(x)$  は  $f(x)$  の導関数,  $\log$  は自然対数,  $e$  は自然対数の底である。 $f(x)$  を求めると,

$$f(x) = \boxed{\text{フ}} x \log x - \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} x + \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}} \quad (x > 0)$$



となる。関数  $f(x)$  は  $x = e^{-\frac{\mu}{\lambda}}$  のとき、最小値

$$-\frac{\gamma}{\lambda} e^{-\frac{\gamma}{\lambda}} + \frac{\beta}{\lambda}$$

をとる。