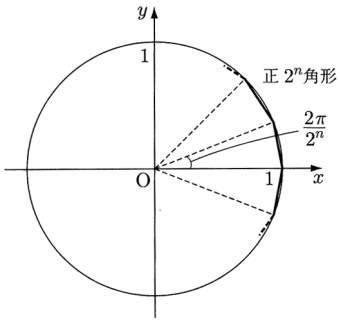
金沢大学

2012年 理系 第1問

1 半径1の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする．次の問いに答えよ．

(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，　$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ．

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，　$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ．