2015年 学芸（数学） 第4問

数理 石井K

4 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-1}$$

で定める．

(1) $y=\log(e^x+e^{-x}-1)$ を微分せよ．

(2) $f(x)\geqq e^x-1$ となるような x の値の範囲を求めよ．

(3) 曲線 $y=e^x-1$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $$y'=\frac{1}{e^x+e^{-x}-1}\cdot(e^x+e^{-x}-1)'=\underline{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-1}}\text{〃}$$

(2) $$f(x)-(e^x-1)=\frac{e^x-e^{-x}-(e^x-1)(e^x+e^{-x}-1)}{e^x+e^{-x}-1}$$

$$=\frac{-(e^x-1)(e^x-2)}{e^x+e^{-x}-1}$$

$e^x+e^{-x}-1>0$ より．$f(x)-(e^x-1)\geqq 0$ となるのは．

$(e^x-1)(e^x-2)\leqq 0$ $\quad\therefore\ 1\leqq e^x\leqq 2$ $\quad\therefore\ \underline{0\leqq x\leqq \log 2}$〃

(3) (2) より．交点の x 座標は 0，$\log 2$ なので

$$S=\int_0^{\log 2} f(x)-(e^x-1)\,dx$$

$$=\Big[\log(e^x+e^{-x}-1)-e^x+x\Big]_0^{\log 2}$$

$$=\log\left(2+\frac{1}{2}-1\right)-2+\log 2+1$$

$$=\underline{\log 3-1}\text{〃}$$