0002071728297999

東京農工大学

2015年 第1問

1 点Oを原点とする座標空間上に3点A(1, −1, 0), B(1, 1, 4), C(4, 3, 5)をとる．次の問いに答えよ．

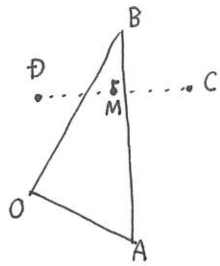
(1) 平面OABに関して点Cと対称な点をDとする．ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を適当な実数$s$, t, uを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表したとき，s, t, uの値を求めよ．

(2) 四面体OABCの体積を求めよ．

(3) 点Oと平面ABCの距離を求めよ．



(1) 線分CDの中点をMとおくと，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$$
$$=\frac{s}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OB}+\left(\frac{1}{2}+\frac{u}{2}\right)\overrightarrow{OC}$$

点Mは平面OAB上にあることから，$\frac{1}{2}+\frac{u}{2}=0 \quad \therefore u=-1$

このとき，$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$
$$=\frac{s}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$$

CM⊥平面OABなので，$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ となる．

いま，$|\overrightarrow{OA}|^2=2$，$|\overrightarrow{OB}|^2=18$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=27$ なので

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{s}{2}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{t}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$=s-1$$
$$\therefore s=1$$
$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{s}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9t-27$$
$$=9t-27$$
$$\therefore t=3$$

以上より，$\underline{s=1,\ t=3,\ u=-1}$ //

(2) $\angle AOB=90^\circ$，CM⊥平面OABより，$V=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{CM}|\cdot\frac{1}{3}$

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(-2,-2,1) \quad \therefore |\overrightarrow{CM}|=3 \quad \therefore V=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{1}{3}=\underline{3}$ //

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20\cdot50-28^2}=3\sqrt{6}$

メモ：$\overrightarrow{AB}=(0,2,4)$
$\overrightarrow{AC}=(3,4,5)$

$\therefore \triangle ABC\times d\times\frac{1}{3}=V$ より $\quad d=\frac{9}{3\sqrt{6}}=\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$ //